

Dr. Yang Quan Chen
4160 Old Main Hill
Room El 256 E&E Dept.
Logan, UT 84322

北京工业学院

研究生毕业论文

飞行器仿真研究和靶道气动力系数辨识

培养单位: 自动控制系
教研室: 208
研究生: 陈阳泉
指导教师: 祁载康 副教授

一九八八年四月十六日

一九八八年四月六日

编号 2Y137

输机

北京工业大学

研究生毕业论文

飞行器仿真研究和
题目 管道气动力系数辨识

系 自动控制

教研室 208

研究生 陈阳泉

指导教师 初素泉 副教授

1988年4月16日

飞行器仿真研究和靶道气动力系数辨识

Flying Vehicle Simulation Studies and Identification of
Aerodynamic Coefficients from Range Test Data

研究生：陈阳泉

指导老师：祁载康

1988年4月

致 谢

本文的工作是在导师祁载康副教授的
有力指导下完成的。作者感谢祁载康老师
细致、严格地指导，他使作者学到了科学
研究的基本方法，具备了进行科学研究所
基本态度，同时也使作者懂得了人生的道
理。对北京工业大学21教研室以及SRC公司的
友好协助，作者深表谢意。

装

订

线

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

摘要

本论文分三部分：第一部分为炮射反飞机导弹的弹道可行性研究，第二部分为靶板数据处理，第三部分为炮弹仿真研究。

第一部分主要介绍 S.R.C. 公司的炮射反飞机导弹定义，引入全攻角空速座标系及全攻角弹体座标系，建立了六自由度导弹仿真模型，完成了通用性较好的导弹仿真软件。弹道可行性计算表明，此定义的炮射反飞机导弹可以成功地截击飞机。

第二部分着重讨论靶板试验的攻角运动数据处理，主要推导了弹丸运动的六自由度弹道仿真模型并介绍了模型的修正方法，使用此弹道模型直接以各气动力系数为拟合参数，考虑了所有非线性时变因素。应用微分校正方法，计算表明那些对攻角运动贡献较大的气动力系数如 $C_{\alpha a}$, $C_{\alpha p a}$, $C_{\alpha q a}$ 及 $C_{\alpha r a}$ 能够较可信地辨识出来。

第三部分建立了刚体六自由度炮弹仿真模型，提出了准确计算大射角名义弹道的五自由度炮弹仿真模型以及一个精确的快速四自由度模型，讨论了各模型之间的关系以及模型切换问题。文中对初始扰动引起的气动突跳作了理论定性分析，揭示了气动突跳的一些规律。

本文所涉及的算法与模型全部以 Fortran-77 语言软件实现，并都以真实弹丸数据及实际打靶数据证实了软件的可行性与实用性。其中一些软件开始拥有用户。

装
订
线

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

装
订
线

ABSTRACT

This thesis consists of 3 parts . Part 1 is on the trajectory feasibility study of a gun-launched anti-aircraft missile proposed by S.R.C. , Part 2 is on the yaw card data reduction & Part 3 is on the projectile simulation studies .

In the first part , the S.R.C proposed gun-launched anti-aircraft missile concept definition is introduced . A 6-DOF missile simulation model is derived where the total angle of attack air velocity coordinate system (TAWCS) and the total angle of attack body coordinate system(TABCS) are defined . A corresponding software which has some versatilities has been implemented . The calculations show that this feasibility study is positive .

In part 2 , the angular motion data reduction problem in yaw card test is studied. A 6-DOF trajectory model is derived together with a modification method for this model. Using this modified 6-DOF model , the aerodynamic coefficients can be taken as fitting parameters directly . All nonlinear and time variable effects can be considered in the fitting process. By applying the differentiational correction method , calculations show that all the aerodynamic coefficients which have more contributions to the angular motion such as C_{aa} , C_{apa} , C_{mqa} and C_{la} can be identified more confidently from the test data .

In part 3 , a rigid body 6-DOF projectile simulation model is derived . A 5-DOF model is advanced for accurate calculation of the nominal trajectory in high firing elevation cases . Also an accurate fast 4-DOF model is derived which includes all the possible effects on the steady state yaw of repose . The theoretical analysis of the aerodynamic jump due to initial disturbances and dynamic imbalance are also given.

All the algorithms , methods and models have been implemented in Fortran-77 . All the software are debugged . Tests with practical projectile data and firing data show the real usefulness of these software . Some software have been used by users .

目录 [CONTENT]

第一部分 炮射反飞机导弹弹道可行性研究

引言 ----- (2)

第一章 炮射反飞机导弹定义

引言 ----- (3)

§1.1. 目标的定义 ----- (3)

§1.2. 导弹系统的定义 ----- (4)

§1.3. 导弹的物理特性与气动特性 ----- (5)

第二章 六自由度导弹仿真模型及程序GM6

引言 ----- (10)

§2.1. 坐标系定义与几何关系 ----- (10)

§2.2. 作用于导弹上的力及投影——导弹质量运动方程的建立 ----- (14)

§2.3. 作用于导弹上的力矩及投影——导弹绕质心运动方程的建立 ----- (18)

§2.4. 目标运动模型 ----- (20)

§2.5. 控制器模型 ----- (23)

§2.6. 末制导方案——比例导引法 ----- (24)

§2.7. 一个简易的中间制导方案 ----- (25)

§2.8. 弹道终止方法及地球曲面影响的修正 ----- (28)

§2.9. 程序GM6 ----- (30)

第三章 弹道可行性的计算

§3.1. 概述 ----- (33)

§3.2. 自由飞行试验 ----- (33)

§3.3. 控制器增益的决定 ----- (34)

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

§3.4 末制导试验	(38)
§3.5 中间制导试验	(43)
§3.6 组合试验 —— 中间制导和末制导	(46)
§3.7 结论	(49)

第一部分 鞍板数据处理

第一章 概述

§1.1 气动辨识问题 (51)

§1.2 鞍板鞍道试验简介 (54)

第二章 鞍板数据处理 —— 非线性模型方法

§2.1 引言 (57)

§2.2 弹丸运动的六自由度模型 (58)

§2.3 基于 Newton-Raphson 迭代的微分校正方法 (66)

§2.4 程序 NYC 及两组真实打靶数据的处理 (75)

§2.5 气动力系数敏感性分析与非线性气动
参数的讨论 (84)

§2.6 结论及改进意见 (92)

第三部分 炮弹仿真研究

第一章 炮弹弹道仿真模型的研究

§1.1 概述 (95)

§1.2 刚体六自由度弹道计算模型 (97)

§1.3 弹丸运动的五自由度模型 (104)

§1.4 一个新的四自由度模型 (109)

§1.5 模型切换问题的讨论 (111)

第二章 炮弹弹道仿真软件及仿真结果讨论

§2.1 程序 LOB6 及 LOB456 (114)

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

§2.2 $ISG=0 \sim 9$ 情况	(116)
§2.3 $ISG=10, 11$ 情况	(124)
§2.4 结论	(126)
第三章. 初始扰动对弹道影响的研究	
§3.1 概述	(128)
§3.2 气动突跳模型及分析	(129)
§3.3 $\tilde{K}_{10}, \tilde{K}_{20}$ 换算公式及分析	(137)
§3.4 动不平缓的影响	(141)

附录.

1. SRC 155mm. ERFB MK10 MOD2 弹特性.	(148)
2. 巴黎大炮特性.	(149)
3. 论文附本内容目录.	(150)

装
订
线

第一部分 (Part 1.)

火炮射反飞机导弹弹道可行性研究

(Trajectory Feasibility Study of A
Gun-Launched Anti-Aircraft Missile)

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

引言：

这一部分的工作是基于北京工业学院与空间研究公司(SRC)的合同要求而完成的。首先开发一个通用性较强的六自由度导弹仿真程序，作为炮射导弹仿真计算用。然后，由SRC定义炮射反飞机导弹，本文由此进行其弹道可行性的计算。

从60年代开始，SRC就与美国弹道研究实验室(BRL)对炮射导弹(火箭)进行了大量的研究与试验。那时，主要是借助大口径火炮的高初速，将火箭射到高空甚至外层空间来进行高空研究，即HARP计划[1.6]、[1.7]。SRC的Bull,G.V.及BRL的Murphy,C.H.在这方面做了开创性的工作。

真正的炮射导弹应用于实战部队装备，是美国耗资16.6亿美元研制成的“铜斑蛇”炮射制导炮弹(CLGP)，它可以说是一种对付近程的地面上机动目标如坦克的炮射导弹，射程6~12公里，采用半主动激光制导技术，是比较成熟的制导炮弹。目前它已开始批量生产并装备美军第24机械化步兵师。

SRC由于具有HARP计划的经历，因此希望对炮射反飞机导弹进行探索。本文仅是最初步的弹道可行性计算。

装
订
线

第一章 炮射反飞机导弹定义

引言：

本章主要介绍SRC对这种炮射反飞机导弹的初步定义。主要是气动外形、气动系数以及弹的物理特性，目标机动与截击要求等几个方面的定义。SRC对弹的具体性能及控制系统等未作详细定义，本文仅作初步的可行性探讨。

装
订
线

3.1. 目标的定义

假设目标为高空或低空以马赫数 $2\frac{1}{2}$ 的速度飞来的轰炸机。飞机的最大机动过载为49。

假设飞机从300 km以外(距炮口)能被地面跟踪雷达或空中侦察机跟踪到。目标作如下4种形式的机动飞行：

- (1). 在10 km. 高空作匀速直线飞行；
- (2). 在海平面作低空直线飞行；
- (3). 在指定飞行高度作之字形机动飞行。见图1.1，之字形由一系列半圆组成，半径约为12 km. 这个半径值是与马赫数 $2\frac{1}{2}$ 、最大机动过载为49是相符的。
- (4). 先在10 km. 高空作匀速直线运动，飞行一段时间后俯冲到水平高度作之字形机动。之字形机动飞行的描述同上。半圆半径也是12 km. 参见图1.2

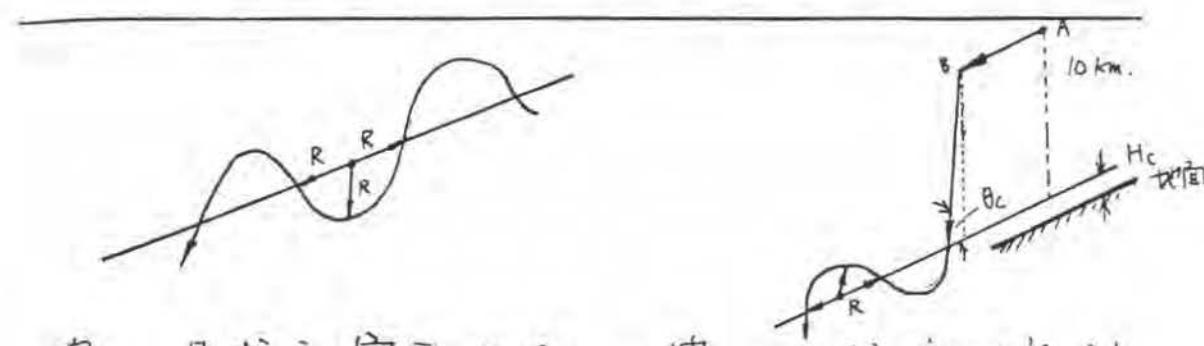


图1.1. 目标之字型机动. 图1.2. 目标俯冲运动.

装订线

§1.2. 导弹系统定义

导弹系统的基本组成包括炮射导弹与跟踪雷达。雷达可以连续跟踪目标，从而控制导弹击中目标。设目标信号第一次被捕获时目标距炮口300 km，此后过10~15秒发射导弹，这个时间是调整炮位所需，这由火控系统决定。典型的导弹弹道见图1.3

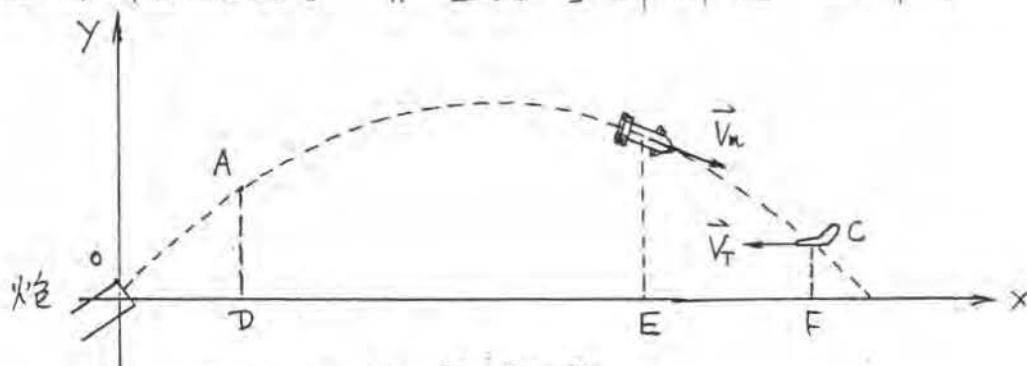


图1.3. 典型的导弹弹道.

导弹以1700 m/s(约为马赫5)初速发射。自由飞行至A点，约50秒。从A点起，导弹导引控制起作用，由跟踪雷达提供信息，将导弹导引击中目标。假设导弹射面与目标面成夹角约为10°左右。中间制导从A点到B点，从B点起导弹切换到自主式导引。

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

设 EF 约为 30 km., 末制导使用比例导引律。

3.1.3. 导弹的物理特性与气动特性。

导弹为一非旋转的、气动稳定的，并由炮发射。它有两组十字稳定翼，一组是在弹体中部，一组是在弹体后部。前面的一组翼是气动控制翼。导弹的外形图见图 1.4.

导弹的物理特性为：

弹径：203 mm. (8 in.)

细长比：18

重心位置：10.025 cal. (从弹头计起)

I_{xx} ：1.2 公斤·米²

I_{yy} ：56 公斤·米²

弹重：200 kg.

弹上所装发动机助推，其参数为：

喷管半径：6 in.

真空比推力：300 秒

燃烧时间：6 秒

燃料重：25 kg.

SRC 使用计算机程序估算此弹的气动力系数及控制力气动系数。全阻力系数对攻角与马赫数的变化见表 I ($C_d(\alpha_T, M)$)，全升仰力矩系数对攻角与马赫数的变化见表 II ($C_M(\alpha_T, M)$)，全法向力系数对攻角与马赫数的变化见表 III ($C_N(\alpha_T, M)$)。滚转阻尼与马赫数

的关系见表Ⅳ($C_{dp}(M)$)，俯仰阻尼系数与马赫数的关系 $C_{mqx}(M)$ 见表Ⅴ，全指向控制力系数导数 $C_{N\delta}(M)$ 与马赫数的关系见表Ⅵ，全俯仰控制力矩系数导数与马赫数的关系 $C_{M\delta}(M)$ 见表Ⅶ，滚转控制力矩系数与马赫数的关系 $C_{L\delta}(M)$ 见表Ⅷ。

要注意，所有气动力的计算都是“全攻角面”上的结果。 C_D, C_N, C_M 均为二维表格，考虑了所有的非线性等因素。 $C_{N\delta}$ 考虑了下洗的影响， $C_{L\delta}$ 是单翼的影响。

装
订
线

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

装
订
线

Table-1 Total drag coefficient $C_d(\alpha_r, M)$

	0	2	4	6	8	10
1.50	0.7547	0.815	0.9665	1.174	1.4116	1.667
1.75	0.6984	0.7537	0.8923	1.081	1.299	1.533
2.00	0.6436	0.6935	0.8189	0.9908	1.19	1.406
2.50	0.559	0.5995	0.7021	0.8441	1.01	1.193
3.00	0.4956	0.5299	0.6173	0.7393	0.8832	1.043
3.50	0.4463	0.476	0.552	0.6587	0.7854	0.9268
4.00	0.407	0.4332	0.5003	0.5749	0.7076	0.834
4.50	0.3746	0.3979	0.456	0.5430	0.6445	0.7707

Table-2 Total normal force coefficient $C_N(\alpha_r, M)$

	0	2	4	6	8	10
1.50	0	1.559	2.952	4.203	5.328	6.346
1.75	0	1.352	2.567	3.663	4.675	5.608
2.00	0	1.180	2.247	3.223	4.129	4.987
2.50	0	0.9461	1.81	2.613	3.376	4.12
3.00	0	0.7971	1.529	2.215	2.875	3.527
3.50	0	0.6731	1.333	1.939	2.529	3.12
4.00	0	0.6115	1.1238	1.719	2.251	2.791
4.50	0	0.5468	1.117	1.549	2.034	2.534

Table-3 Total pitching moment coefficient $C_a(\alpha_r, M)$

	0	2	4	6	8	10
1.50	0	-1.793	-4.408	-7.832	-12.048	-17.042
1.75	0	-1.692	-4.113	-7.248	-11.080	-15.593
2.00	0	-1.378	-3.385	-6.003	-9.221	-13.014
2.50	0	-0.967	-2.417	-4.330	-6.686	-9.465
3.00	0	-0.695	-1.783	-3.241	-5.049	-7.186
3.50	0	-0.506	-1.341	-2.483	-3.911	-5.605
4.00	0	-0.35	-0.985	-1.881	-3.021	-4.384
4.50	0	-0.225	-0.699	-1.399	-2.309	-3.408

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

Table-4 Roll damping coefficient $C_{lp} [M]$

0.6	0.7	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
-62.2	-62.7	-60.9	-51.65	-45.5	-45.6	-45.75	-45.8

Table-5 Pitching damping coefficient $C_{qa} [M]$

1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
-1279	-962.6	-825.1	-504.4	-228.1	-218.0	-138.3	-61.8	-5.0

Table-6 Total normal force derivative due to control fin deflection $C_{n\delta} [M]$

1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
21.57	18.95	16.33	12.80	10.62	9.10	7.98	7.11

Table-7 Rolling moment derivative due to control fin deflection $C_{m\delta} [M]$

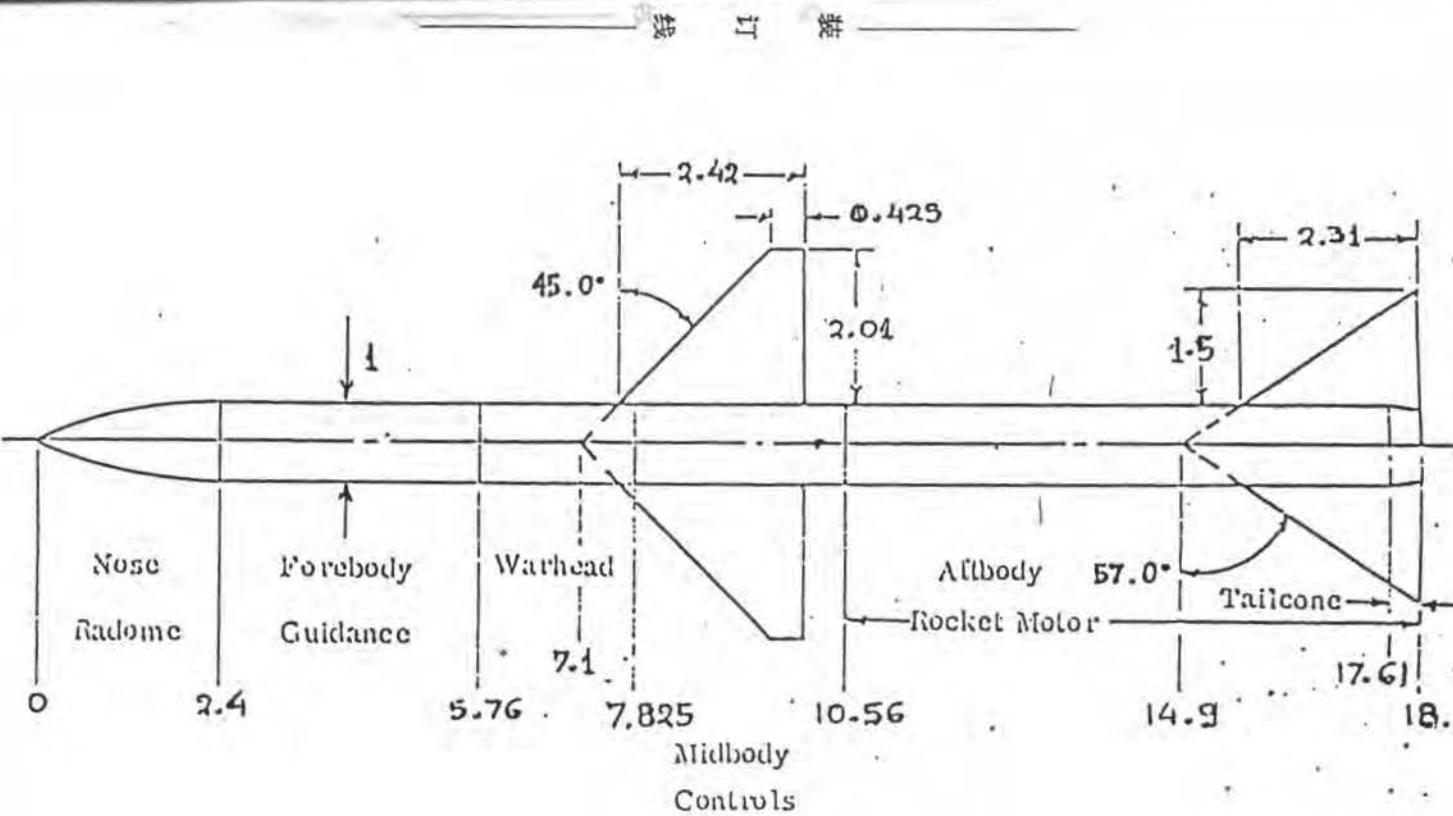
1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
-28.92	-25.17	-21.65	-16.86	-13.92	-11.89	-10.40	-9.25

注：单翼型。

Table-8 Total pitching moment due to control fin deflection $C_{M\delta} [M]$

1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
64.03	48.82	40.50	28.35	21.43	17.08	14.19	12.12

图 1.4. 导弹外形图



All dimensions in calibers

第二章 六自由度导弹仿真模型及程序 GM6

引言

本章主要介绍六自由度(6-DOF)导弹仿真程序GM6所使用的数学模型。包括了轴系定义与几何关系推导、运动方程组的建立、目标运动模型、控制器模型、制导方法(末制导与中间制导)、弹道终止方法等。要使得GM6成为一了通用的程序，设法使得GM6中包含各种目标机动情况、各种控制系统及导引方法等，这显然是不可能的也没必要。因为对一了实际导弹的仿真，无非就是气动力部分、大气部分、火箭推力部分、导引控制部分需要变动，因此在GM6中，这些有可能变动的模块都被定义为“用户模块”，清晰地定义它们的入口、出口信息，尤其是出口信息。实际上，用户的工件仅是利用此模块的入口信息以及其自身输入信息以完成规定的出口信息即可。基于这样思想，GM6可望成为一了通用性较好的程序。本文的计算，可以看作GM6的一了用户使用实例。当有某些部分需要变动时，只要修改相应的用户模块即可，免去许多重复的工作。

3.2.1 坐标系定义与几何关系

推导6-DOF导弹仿真模型，首先要对该

及的坐标系(CS)进行定义。像[1]中所描述的坐标系详细定义，虽然有助于建立坐标系间相互关系的空间概念，但每一篇相关文献一开始就开始进行如此复杂、冗长的定义显然是不必要的。因此本文试图采取一种简洁的方法来描述本文所涉及的CS之间的关系。因为在实际上，仅需要详细定义一个CS如地面CS(ECS)，那么其它CS就可以通过转角关系来确定其在空间的位置了。基于[1]，本文使用了如下六个坐标系：

- 1). 地面坐标系：ECS (A-X_eY_eZ_e)
- 2). 弹体坐标系：BCS
- 3). 混空速坐标系：QWCS
- 4). 空速坐标系：WCS
- 5). 全仪角空速坐标系：TAWCS
- 6). 全仪角弹体坐标系：TABCS

其中ECS详细定义如下：

A：发射点

A_{X_e}：在包含发射方向的水平面内，指向发射方向为正。

A_{Y_e}：过A点的地垂线，向上为正。

A_{Z_e}：由右手坐标准则确定。

其余坐标系之间的转角关系图见图1.5，其中，[P]_x表示绕X轴转动+θ角(逆时针方向为正)，L_{x(P)}表示基本变换矩阵。三种基本变换矩阵为：

$$L_x(\alpha_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & \sin\alpha_x \\ 0 & -\sin\alpha_x & \cos\alpha_x \end{bmatrix}$$

$$L_y(\alpha_y) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y \end{bmatrix}$$

$$L_z(\alpha_z) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_z & \sin\alpha_z & 0 \\ -\sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

装
订
线

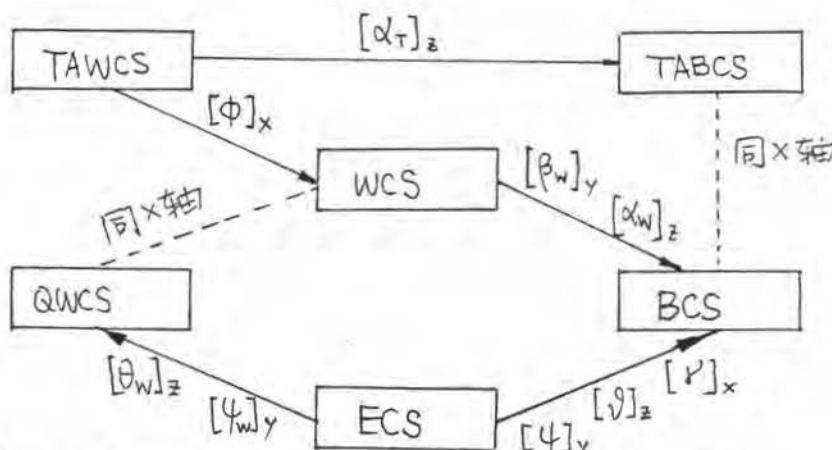


图 1.5. GM6 中坐标系角度关系图。

ψ_w, θ_w 为空速 $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)^T$ 的方向角。记 $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ 为弹相对地面的速度， $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$ 为风相对地面的速度，则有：

$$\vec{V} = \vec{u} - \vec{w}, \text{ 即: } (V_x, V_y, V_z)^T = (u_x - w_x, u_y - w_y, u_z - w_z)^T.$$

即 $\begin{cases} \psi_w = -\operatorname{tg}^{-1}(V_z / V_x) \\ \theta_w = \operatorname{tg}^{-1}(V_y / (\sqrt{V_x^2 + V_z^2})) \end{cases} \quad \cdots (1)$

在图 1.5 中所涉及的角，只有五角是独立的，其余的角皆可由这五角独立角导出，这就是几何关系方程。这五角独立的角是

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

机体俯仰、偏航、滚转位置角 ϑ, β, α 以及空速方向角 ψ_w, θ_w 。那么, $\alpha_w, \beta_w, \alpha_T$ 可以由下面的几何关系方程得到。为方便这种几何关系的求取, 本文借助自行开发的“坐标系转换矩阵以及几何关系方程自动生成程序”。

$$\begin{aligned}\beta_w &= \sin^{-1} [\sin \vartheta \cdot (\sin \beta) \cdot \cos \theta_w \cdot \cos(\varphi - \psi_w) - \cos \vartheta \sin \theta_w] + \\ &\quad \cos \vartheta \cdot \sin(\varphi - \psi_w) \cdot \cos \theta_w \\ \alpha_w &= \sin^{-1} [(\cos \vartheta \cdot \sin \beta) \cdot \cos \theta_w \cos(\varphi - \psi_w) - \cos \vartheta \sin \theta_w] - \\ &\quad \sin \vartheta \cdot \sin(\varphi - \psi_w) \cdot \cos \theta_w] \quad -(1.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_T &= \cos \alpha_w \cdot \cos \beta_w \\ \cos \beta &= \sin \alpha_w / \sin \alpha_T \\ \sin \beta &= \cos \alpha_w \cdot \sin \beta_w / \sin \alpha_T \quad -(1.3)\end{aligned}$$

实际计算中, 为防止数值计算误差, α_T 仅用下式:

$$\alpha_T = \sin^{-1} [(\sin^2 \alpha_w + \sin^2 \beta_w - \sin^2 \alpha_w \cdot \sin^2 \beta_w)^{1/2}] \quad -(1.4)$$

本文定义了两个新的坐标系 TAWCS 及 TABCS, 这是由于通常气动力系数都在全攻角面上给出, 为了准确地反映较大攻角时的气动力的投影关系, 应将气动力以及力矩在全攻角面上计算出, 然后使用此中的关系进行投影。当然, 当 α_T 较小时, 可以近似地将全攻角面上给出的气动力系数同用于纵向与侧向面, 实际上, 这是作了 $\alpha_T^2 = \alpha_w^2 + \beta_w^2$ 的假设。

§2.2. 作用于导弹上的力及投影——导弹质心运动方程的建立.

一. 重力加速度 \vec{g}_e

设 $(x, y, z)^T$ 为导弹在 ECS 中的位置, 则重力加速度 \vec{g}_e 为:

$$|\vec{g}_e| = g_0' \cdot [h/(r_e + h)]^2 \quad \dots (1.5)$$

其中, r_e : 地球半径 (地球圆球假设)

· h : 导弹所在的当地海拔高度

$$g_0' = g_0 + r_e \cdot \Omega_e^2 \cdot \cos^2 L_e \quad \dots (1.6)$$

$$g_0 = 32.174 \cdot [1 - 0.0026 \cdot \cos(2L_e)] \quad (\text{ft/sec}^2) \quad \dots (1.7)$$

其中, L_e : 弹所处地球纬度

Ω_e : 地球自转角速度

若记 $R_h = r_e + h$, $R_y = r_e + y$, $g = |\vec{g}_e|$, 则

$$\vec{g}_e = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cdot x/R_h \\ -g \cdot R_y/R_h \\ g \end{bmatrix} \quad \dots (1.8)$$

二. 离心加速度 \vec{g}'' 及 Coriolis 加速度 $\vec{\lambda}$

在 ECS 中, 离心加速度 \vec{g}'' 为

$$\vec{g}'' = - \begin{bmatrix} \sin L_e \cdot \cos \lambda_e \cdot \omega \lambda_e \\ -\cos^2 L_e \\ -\sin L_e \cdot \cos L_e \cdot \sin \lambda_e \end{bmatrix} \cdot R_h \cdot \Omega_e^2 \quad \dots (1.9)$$

其中, λ_e 为重发射方位角, 向北方向顺时针为正.

哥氏加速度 $\vec{\lambda}$ 公式为 (ECS 中)

$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \Omega_e \cdot \cos L_e \cdot \sin \lambda_e \cdot U_y \\ 2 \cdot \Omega_e \cdot \cos L_e \cdot \sin \lambda_e \cdot U_x \\ 2 \cdot \Omega_e \cdot \sin L_e \cdot U_x - 2 \cdot \Omega_e \cdot \sin L_e \cdot \cos L_e \cdot U_y \end{bmatrix} \quad \dots (1.10)$$

所以在 ECS 中重力、离心力、哥氏力表达

为：
 $\vec{G}_e = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = m \cdot (\vec{g}_e + \vec{g}'' + \vec{\Lambda}) \quad \dots (1.11)$

其中， m 为导弹质量。

三. 气动力 \vec{F}_a

一般地，风洞的气动测量都是在全攻角面上得到的结果，因此这里设所有气动力系数定义在全攻角面空速坐标系 TAWCS 上，有：

$$\vec{F}_a = (F_{ax}, F_{ay}, F_{az})^T = \frac{1}{2} \rho V^2 S \cdot (C_x, C_y, C_z)^T \quad \dots (1.12)$$

其中，
 $C_x = - (C_{d\alpha} + C_{d\alpha^2} \cdot \alpha_T^2)$
 $C_y = C_{L\alpha} \cdot \alpha_T + C_{L\alpha^3} \cdot \alpha_T^3$
 $C_z = C_{p\alpha} \cdot (\omega_x l / 2V) \cdot \alpha_T \quad \dots (1.12)'$

注意： α_T 为全攻角，总为正值。

四. 控制力 \vec{F}_c

一般地，控制力由 4 个控制面产生，设其等效控制面舵偏角分别为 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ ，

δ_x ：滚转控制舵偏角

δ_y ：偏航控制舵偏角

δ_z ：俯仰控制舵偏角

控制力在 BCS 中定义，则

$$\vec{F}_c = \begin{bmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \\ F_{cz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \cdot \begin{bmatrix} \delta_x \\ C_{L\delta} \cdot \delta_z \\ -C_{L\delta} \cdot \delta_y \end{bmatrix}$$

其中， $C_{L\delta}$ ：控制面升力系数。正的控制舵偏角定义如下图(图 1.6)

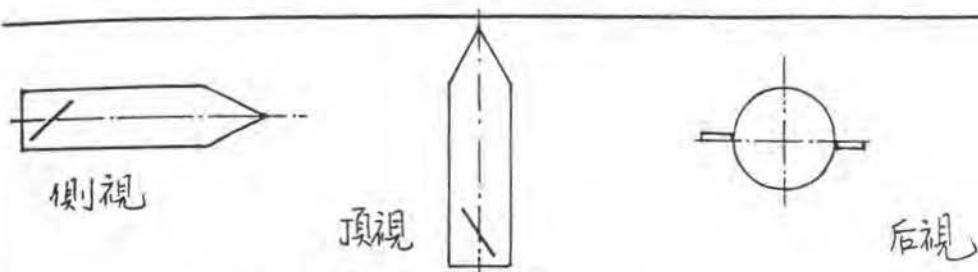


图 1.6. 偏航角的定义

五. 火箭推力 \vec{F}_t

火箭推力在 BCS 中定义，采用线性推力模型，即

$$P_t = |\vec{F}_t| = I_{sp} \cdot g \cdot m_r - p_a \cdot A_e \quad \cdots (1.14)$$

其中， I_{sp} ，真空比冲

A_e ，火箭喷口面积。

m_r ，燃烧速率(质量减少率)。

p_a ，大气压力

g ，重力加速度

记 θ_p , ψ_p 为推力偏心角，它们在 BCS 中定义，

如图 1.7, 图 1.8

$$\vec{F}_t = \begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_t \cdot \cos \theta_p \cdot \cos \psi_p \\ P_t \cdot \sin \theta_p \\ -P_t \cdot \cos \theta_p \cdot \sin \psi_p \end{bmatrix} \quad \cdots (1.15)$$

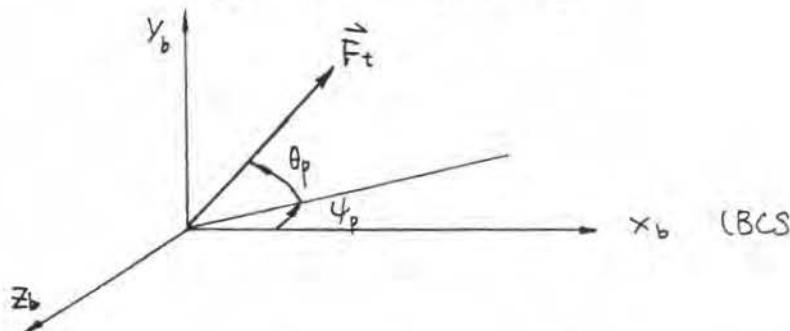


图 1.7. 推力偏心角定义

六、导弹质心运动方程

在ECS中，导弹质心运动的动力学方程为：

$$\begin{cases} m \cdot \frac{du_x}{dt} = \Sigma F_x \\ m \cdot \frac{du_y}{dt} = \Sigma F_y \\ m \cdot \frac{du_z}{dt} = \Sigma F_z \end{cases} \quad \cdots (1.16)$$

则质心运动的运动学方程为：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_x \\ \frac{dy}{dt} = u_y \\ \frac{dz}{dt} = u_z \end{cases} \quad \cdots (1.17)$$

其中， $(\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z)^T$ 是作用于导弹上所有力的合力在ECS中的投影。投影过程是首先将气动力从 TAWCS 投影至 BCS，然后与控制力、火箭推力一起投影到 ECS，所以有，

$$\begin{bmatrix} \Sigma F_x \\ \Sigma F_y \\ \Sigma F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} + L(4, \vartheta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \\ F_{cz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} + L(\phi, \beta_w, \alpha_w) \cdot \begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{ay} \\ F_{az} \end{bmatrix} \quad \cdots (1.18)$$

其中，

$$L(\phi, \beta_w, \alpha_w) = L_z(\alpha_w) \cdot L_y(\beta_w) \cdot L_x(\phi)$$

$$L(4, \vartheta, \gamma) = L_y(-4) \cdot L_z(-\vartheta) \cdot L_x(-\gamma) \quad \cdots (1.19)$$

§2.3 作用于导弹上的力矩及投影——导弹 绕质心运动方程的建立

一. 火箭推力力矩 \vec{M}_t

火箭推力力矩主要是由于推力偏心产生的。 \vec{M}_t 定义在 BCS 中，设 $\vec{r}_t = (x_t, y_t, z_t)^T$ 为推力作用点在 BCS 中的位置，那么应有

$$\vec{M}_t = \vec{r}_t \times \vec{F}_t = (F_{tz}y_t - F_{ty}z_t, F_{tx}z_t - F_{tz}x_t, F_{ty}x_t - F_{tx}y_t)^T \quad \text{---(1.20)}$$

二. 控制力矩 \vec{M}_c

\vec{M}_c 定义在 BCS 中，

$$\vec{M}_c = \frac{1}{2}\rho V^2 S Q \begin{bmatrix} C_{l\delta} \cdot \delta_x \\ C_{m\delta} \cdot \delta_y \\ C_{n\delta} \cdot \delta_z \end{bmatrix} \quad \text{---(1.21)}$$

其中， $C_{l\delta}$ 为俯仰偏航控制力矩系数， $C_m\delta$ 为正则表示正常式控制即控制面在导弹质心之后， $C_n\delta$ 为负表示为鸭式控制。

$C_{l\delta}$ ：滚转控制力矩系数。

三. 空气动力力矩 \vec{M}_a

由于本文采用了全攻角面坐标系，那么空气动力力矩部分定义在 TAWCS 中，一部分定义在 BCS 中。通常阻尼力矩仍在 BCS 中计算，而与攻角有关的力矩系数如 $C_{mp\alpha}$, C_{ma} , C_{na} 则在 TAWCS 中计算。

在 TAWCS 中计算的力矩 \vec{M}_{ai} 为：

$$\vec{M}_{a_1} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ -\frac{1}{2}\rho v^2 s l \cdot C_{m\alpha} \cdot (\omega_x l / 2v) \cdot \alpha_T \\ \frac{1}{2}\rho v^2 s l \cdot (C_{m\alpha} \cdot \alpha_T + C_{m\alpha^3} \cdot \alpha_T^3) \end{bmatrix} \quad \dots (1.22)$$

而在 BCS 中 计 算 的 力 矩 \vec{M}_{a_2} 为

$$\vec{M}_{a_2} = \frac{1}{2}\rho v^2 s l \cdot \begin{bmatrix} C_{\beta} \cdot (\omega_x l / 2v) \\ C_{m\alpha} \cdot (\omega_y l / 2v) \\ C_{m\alpha} \cdot (\omega_z l / 2v) \end{bmatrix} \quad \dots (1.23)$$

那么 将 \vec{M}_{a_1} 投 影 到 BCS 中， 则 \vec{M}_a 为

$$\vec{M}_a = L_z(\alpha_w) \cdot L_y(\beta_w) \cdot L_x(\phi) \cdot \vec{M}_{a_1} + \vec{M}_{a_2} \quad \dots (1.24)$$

四. 绕质心运动方程

在 BCS 中， 子弹绕其质心运动的运动学方程为：

$$\begin{aligned} I_x \cdot \dot{\omega}_x &= \Sigma M_x \\ I_y \cdot \dot{\omega}_y &= \Sigma M_y - (I_x - I_z) \cdot \omega_x \omega_z \\ I_z \cdot \dot{\omega}_z &= \Sigma M_z - (I_y - I_x) \cdot \omega_y \omega_x \end{aligned} \quad \dots (1.25)$$

通常，对于轴对称子弹 $I_y = I_z$ ， 其中 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ 为子弹在转动惯量轴在 BCS 中的投影，且

$$\Sigma \vec{M} = (\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z)^T = \vec{M}_a + \vec{M}_t + \vec{M}_c \quad \dots (1.26)$$

为得到子弹体方位角 ν, ψ, ϑ 的运动学方程，由

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L_x(\nu) \cdot L_z(\vartheta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \vartheta & 0 & 1 \\ \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots (1.27)$$

所以有：

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\gamma/\cos\theta & -\sin\gamma/\cos\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 1 & -\tan\theta\cos\theta & \tan\theta\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \cdots (1.28)$$

即：

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= (\omega_y \cdot \cos\theta - \omega_z \cdot \sin\theta) / \cos\theta \\ \dot{\theta} &= \omega_y \cdot \sin\theta + \omega_z \cdot \cos\theta \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \tan\theta \cdot (\omega_y \cdot \cos\theta - \omega_z \cdot \sin\theta) \end{aligned} \quad \cdots (1.28)'$$

3.2.4. 目标运动模型

为了考虑高空远程的目标运动描述准确性，这里使用 (R, H, D) 来描述目标位置，见图 1.8。设 (x_e, y_e, z_e) 为目标在 ECS 中的位置，则有：

$$\begin{aligned} \eta &= \tan^{-1}(x_e / (r_e + y_e)) \\ r &= [x_e^2 + (r_e + y_e)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

$$R = r \cdot \eta$$

$$H = r - r_e$$

$$D = z_e \quad \cdots (1.29)$$

如已知 (R, H, D) ，则

$$\eta = R / (r_e + H) ; \quad r = r_e + H$$

$$\begin{cases} x_e = r \cdot \sin\eta \\ y_e = r \cdot \cos\eta - r_e \\ z_e = D \end{cases}$$

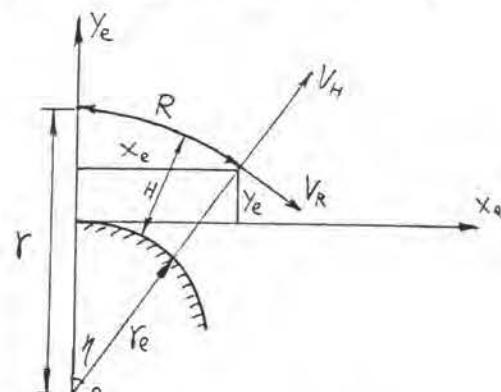


图 1.8 目标位置

当 v_R, v_H (见图 1.8) 给定，则

$$v_{x_e} = v_R \cos\eta + v_H \sin\eta, \quad v_{y_e} = -v_R \sin\eta + v_H \cos\eta, \quad v_{z_e} = v_D \quad \cdots (1.30)$$

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

这里假设了四种目标运动模式用以模拟飞机的机动飞行。记目标开始运动时刻及初始位置分别为 t_0 , (R_0, H_0, D_0)

(1). 常速目标运动模型 ($MP=1$)

记 $\vec{V}_T = (V_{RT}, V_{HT}, V_{DT})^T$ 为常速，则

$$\begin{cases} R_T = V_{RT} \cdot (t - t_0) + R_0 \\ H_T = V_{HT} \cdot (t - t_0) + H_0 \\ D_T = V_{DT} \cdot (t - t_0) + D_0 \end{cases} \quad \cdots (1.32)$$

(2). 目标作之字型机动运动模型 ($MP=2$)

设 V_{HT} 为海拔提升速度, V 为圆周运动线速度, R_{zig} 为半圆半径。参见图 1.1, 记

$$\phi_t = |V| \cdot (t - t_0) / R_{zig}$$

$\phi = \phi_t - \pi \lfloor \phi_t / \pi \rfloor$, 其中, $\lfloor \cdot \rfloor$ 为取整。

所以, $V_{RT} = V \sin \phi$

$$V_{HT} = V_{HT}$$

$$V_{DT} = \begin{cases} |V| \cos \phi \\ -|V| \cos \phi \end{cases}$$

$\cdots (1.33)$

以及

$$R_T = R_0 + R_{zig} \cdot (2 \cdot \lfloor \phi_t / \pi \rfloor + 1 - \cos \phi) \cdot V / |V|$$

$$H_T = H_0 + V_{HT} \cdot (t - t_0)$$

$$D_T = \begin{cases} D_0 + R_{zig} \cdot \cos \phi, & \text{当 } \lfloor \phi_t / \pi \rfloor \text{ 为 } 2 \text{ 的倍数} \\ D_0 - R_{zig} \cdot \sin \phi, & \text{其它} \end{cases}$$

$\cdots (1.34)$

(3). 目标作俯冲运动的运动模型 ($MP=3$)

参见图 1.2, 将目标俯冲运动分为三部分, 首先以匀速运动由 A 点 (R_0, H_0, D_0) 飞到 B 点 (R_1, H_1, D_1) ($MP=1$), 然后目标以给定俯冲角

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

俯冲至指定高度 H_c , 再进行之字形机动($MP=2$)
 其中, $MP=1, 2$ 运动模型的方程见式(1.32)~(1.34),
 在俯冲阶段, 目标运动方程为:

$$\begin{cases} V_{RT} = V_{R_0} \cdot \cos \theta_c \\ V_{HT} = V_{R_0} \cdot \sin \theta_c \\ V_{DT} = V_{D_0} \end{cases}, \quad \begin{cases} R_T = R_1 + V_{RT}(t - t_1) \\ H_T = H_1 + V_{HT}(t - t_1) \\ D_T = D_1 + V_{DT}(t - t_1) \end{cases} \quad \dots (1.35)$$

其中, V_{R_0} 为俯冲速度, t_1 为目标到达 (R_1, H_1, D_1) 时刻。

四. 目标作常加速运动 ($MP=4$)

设 $a_{R_0}, a_{H_0}, a_{D_0}$ 为三方向上的常加速度, 所以,

$$\begin{cases} V_{RT} = V_{R_0} + a_{R_0} \cdot (t - t_0) \\ V_{HT} = V_{H_0} + a_{H_0} \cdot (t - t_0) \\ V_{DT} = V_{D_0} + a_{D_0} \cdot (t - t_0) \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} R_T = R_0 + V_{R_0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_{R_0} \cdot (t - t_0)^2 \\ H_T = H_0 + V_{H_0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_{H_0} \cdot (t - t_0)^2 \\ D_T = D_0 + V_{D_0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_{D_0} \cdot (t - t_0)^2 \end{cases} \quad \dots (1.36)$$

V_{xT}, V_{yT}, V_{zT} 为 目 标 速 度 在 ECS 中 的 投 影.
 V_{xm}, V_{ym}, V_{zm} 为 导 弹 速 度 在 ECS 中 的 投 影.
 那么，目标相对导弹的位置为：

$$\Delta x = x_T - x_m, \Delta y = y_T - y_m, \Delta z = z_T - z_m$$

而 目 标 相 对 导 弹 的 速 度 在 ECS 中 的 投 影 为：

$$\Delta V_x = V_{xT} - V_{xm}, \Delta V_y = V_{yT} - V_{ym}, \Delta V_z = V_{zT} - V_{zm}$$

所 以 导 弹 与 目 标 之 间 的 距 离 为

$$D = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$$

那 么 弹 目 线 LOS 在 ECS 中 的 海 尔 方 位 角 ψ_L 定 义 为：

$$\psi_L = -\tan^{-1}(\Delta z / \Delta x), \theta_L = \tan^{-1}(\Delta y / (\Delta x^2 + \Delta z^2)^{1/2}) \quad \dots (1.40)$$

由 (1.40) 式 可 得 到 $\dot{\psi}_L$ 及 $\dot{\theta}_L$ 的 表 达 式：

$$\begin{cases} \dot{\psi}_L = (\Delta z \cdot \Delta V_x - \Delta x \cdot \Delta V_z) \cdot \cos^2 \psi_L / \Delta x^2 \\ \dot{\theta}_L = [\Delta V_y \cdot (\Delta x^2 + \Delta z^2) - \Delta y \cdot (\Delta x \cdot \Delta V_x + \Delta z \cdot \Delta V_z)] \cdot \cos^2 \theta_L / (\Delta x^2 + \Delta z^2)^{3/2} \end{cases} \quad \dots (1.41)$$

将 $\dot{\psi}_L, \dot{\theta}_L$ 投 影 至 BCS 得 到 导 引 信 号

$$\begin{cases} f_{gy} = k_{yL} \cdot (\dot{\psi}_L \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi + \dot{\theta}_L \cdot \sin \varphi) \\ f_{gz} = k_{zL} \cdot (-\dot{\psi}_L \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta}_L \cdot \cos \varphi) \end{cases} \quad \dots (1.42)$$

其 中 k_{yL}, k_{zL} 为 信 号 放 大 系 数。

§2.7. 一 个 简 易 的 中 间 制 导 方 案.

中 间 制 导 的 目 的 就 是 要 导 引 导 弹 至 追 赶 的 弹 目 相 对 位 置 以 保 证 末 制 导 能 导 引 导 弹 正 确 击 中 目 标。由 于 本 文 采 取 的 高 速 火 箭 导 弹，这 个 中 间 制 导 在 较 高 空 进 行，因 此 可 以 使 用 真 空 弹 道 预 测 的 办 法 来 产 生 导 引 信 号。

一、简化后的中间制导

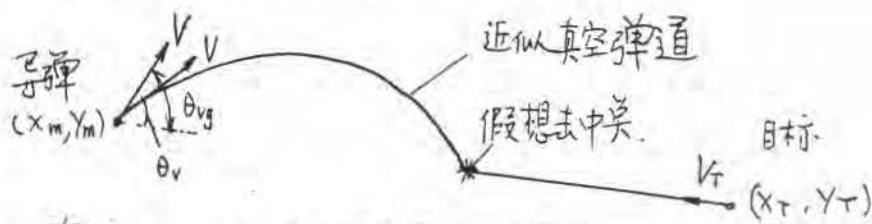


图 1.12. 中间制导方案

由图 1.12 可知，目标与导弹的相对位置（假设可由地面跟踪雷达提供）为：

$$\Delta x = x_T - x_m, \Delta y = y_T - y_m$$

假设假想击中点与导弹当前位置的相对位置为：

$$\begin{cases} \Delta x_1 = (x_T + V_{xT} \cdot T) - x_m = \Delta x + V_{xT} \cdot T \\ \Delta y_1 = (y_T + V_{yT} \cdot T) - y_m = \Delta y + V_{yT} \cdot T \end{cases} \quad \text{--- (1.43)}$$

又，
 $\begin{cases} \Delta x_1 = V \cdot \cos \theta_{vg} \cdot T \\ \Delta y_1 = V \cdot \sin \theta_{vg} \cdot T - \frac{1}{2} g T^2 \end{cases} \quad \text{--- (1.44)}$

其中， V : 当前导弹速度 (可由地面雷达测得)

θ_v : 当前导弹速度倾角

θ_{vg} : 带用导弹速度倾角，以保证在 T 时间内在假想击中点击中目标。

由式(1.43)、式(1.44)得到

$$\begin{cases} (V \cos \theta_{vg} - V_{xT}) \cdot T = \Delta x \\ (V \sin \theta_{vg} - V_{yT}) \cdot T - \frac{1}{2} g T^2 = \Delta y \end{cases} \quad \text{--- (1.45)}$$

由于每一时刻地面雷达都能提供 $\Delta x, \Delta y, V_{xT}, V_{yT}$ 及 V 的信息，所以从式(1.45)中可得到 θ_{vg} 及 T ，那么导引信号就取作

$$f_{g3} = K_2 \cdot (\theta_{vg} - \theta_v) \quad \text{--- (1.46)}$$

K_2 为信号放大倍数。

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

为求 θ_{vg} , 使用下面的迭代方案。首先求 T, 由式(4.45)有

$$T_{k+1} = \Delta x / (V \cdot \cos(\theta_{vg})_k - V_{xT}) \quad \dots (1.47)$$

其中, $(\theta_{vg})_k$ 为第 k 次迭代值, 取 θ_{vg0} 为上次 θ_{vg} 值。又

$$T''_{k+1} = \frac{1}{g} \left\{ (V \cdot \sin(\theta_{vg})_k - V_{yT}) + [(V \cdot \sin(\theta_{vg})_k - V_{yT})^2 - 2g \cdot \Delta y]^{1/2} \right\} \dots (1.48)$$

取 $T_{k+1} = \frac{1}{2} (T'_{k+1} + T''_{k+1})$ 代入式(4.46)得

$$(\theta_{vg})_{k+1} = (\Delta y + V_{yT} \cdot T_{k+1} + \frac{1}{2} g \cdot T_{k+1}^2) / (V \cdot T_{k+1}) \quad \dots (1.49)$$

若 $|(\theta_{vg})_{k+1} - (\theta_{vg})_k|$ 达到要求精度则终止迭代, 且 $\theta_{vg} = (\theta_{vg})_{k+1}$, 否则继续迭代。

我们发现, 要使末制导击中目标, 则末制导开始时导弹、目标之间应有一定距离 x_r , 所以中间制导公式中, $(\Delta x)_{\text{测量}}$ 应减去 x_r , 即 $\Delta x = (\Delta x)_{\text{测量}} - x_r$ 。

为了修正真空弹道与真实弹道的区别, 设实际击中点与假想击中点相差 $\Delta x_e, \Delta y_e$, 因此仍在 T_k 时间内击中应将 θ_{vk} 修正成 θ_{ek} , 从

$$\begin{cases} \Delta x_e = V \cdot (\cos \theta_{ek} - \cos \theta_{vk}) \cdot T_k \\ \Delta y_e = V \cdot (\sin \theta_{ek} - \sin \theta_{vk}) \cdot T_k \end{cases} \quad \dots (1.50)$$

$$\text{所以 } \theta_{ek} = \tan^{-1} [(V \sin \theta_{vk} + \Delta y_e / T_k) / (V \cos \theta_{vk} + \Delta x_e / T_k)]$$

取 $\Delta y_e / T_k, \Delta x_e / T_k$ 为常数 C_{g1}, C_{g2} 。则

$$\theta_{ek} = \tan^{-1} [(V \sin \theta_{vk} + C_{g1}) / (V \cos \theta_{vk} + C_{g2})] \quad \dots (1.51)$$

因此最后的导引信号为

$$f_{gz} = k_z \cdot (\theta_{ek} - \theta_v) \quad \dots (1.52)$$

二. 偏航面的中间制导

由于假设飞机从较远处迎面飞来, 因

此中间制导在偏航面的信号较小。因此本文采用较简单的方法。设：

$$\Delta x = x_T - x_m, \Delta z = z_T - z_m$$

$\Delta x, \Delta z$ 设可使用地面雷达得到，则

$$y_L = -\tan^{-1}(\Delta z / \Delta x)$$

如果导弹的实际偏航方向角为：

$$y_v = -\tan^{-1}(V_z / V_x)$$

那么，导引信号即由

$$f_{gy} = k_y \cdot (y_L - y_v) \quad \cdots (1.53)$$

给出，其中， k_y 为导引信号放大倍数。

§2.8 弹道终止算法及地球曲面影响的修正。

一、弹道终止算法

弹道计算使用数值积分，几乎不可能在积分结束时的状态就正好是终止条件下的状态。对于导弹截击目标，必须较准确地了解“脱靶量”，因此需要一个较好的办法来得到终止条件下的状态。一般地，弹道终止可采用减步长的办法[1.5]，但这里本文采用杆值方法，计算表明：弹道终止的杆值算法速度快、精度高。

导弹截击目标的“脱靶量”可以定义在 Y 与 Z 方向上 (X-轴终止模式)，也可以定义在 X 与 Z 方向上 (Y-轴终止模式) 见图 1.13、图 1.14 所示。

以 X-轴终止为例，设 x_m, x_T 分别分导

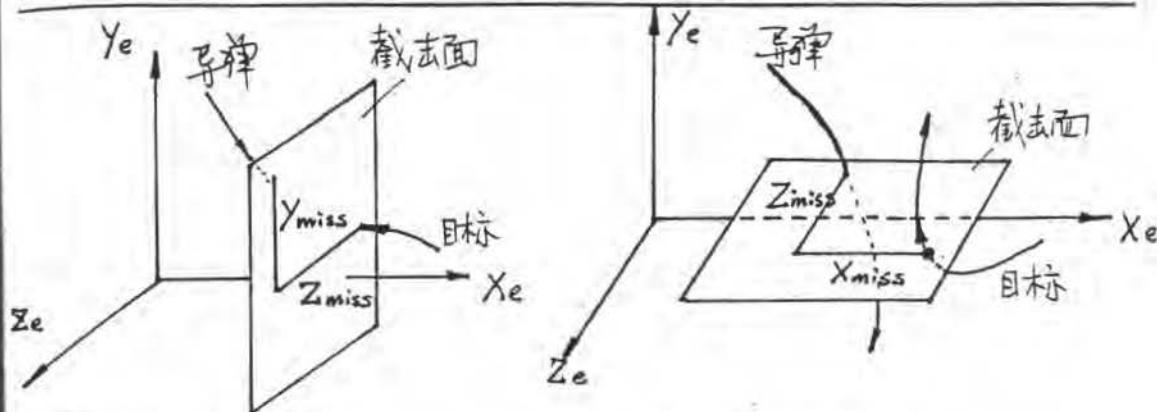


图 1.13. X-轴终止.

图 1.14. Y-轴终止.

弹与目标的第一步积分时的 x 坐标(ECS中), 所以很明显当 $x_{mi} > x_{Ti}$ 时导弹截击目标。使用 Gauss 插值公式:

$$x(\bar{t}) = 0.5 \cdot (\bar{t}^2 - \bar{t}) \cdot x_{i-2} + (1 - \bar{t}^2) \cdot x_{i-1} + 0.5 \cdot (\bar{t}^2 + \bar{t}) \cdot x_i \quad \dots (1.54)$$

其中, $\bar{t} = (t - t_{i-1}) / h$, h 为积分步长。

代入导弹与目标的 x 坐标, 有

$$\begin{cases} x_m(\bar{t}) = 0.5 \cdot (\bar{t}^2 - \bar{t}) \cdot x_{mi-2} + (1 - \bar{t}^2) \cdot x_{mi-1} + 0.5 \cdot (\bar{t}^2 + \bar{t}) \cdot x_{mi} \\ x_T(\bar{t}) = 0.5 \cdot (\bar{t}^2 - \bar{t}) \cdot x_{Ti-2} + (1 - \bar{t}^2) \cdot x_{Ti-1} + 0.5 \cdot (\bar{t}^2 + \bar{t}) \cdot x_{Ti} \end{cases} \quad \dots (1.55)$$

令 $x_{mi}(\bar{t}) = x_T(\bar{t})$, 则可得到 \bar{t} , 因此导弹截击目标的时刻为:

$$t = t_{i-1} + h \cdot \bar{t} \quad \dots (1.56)$$

将 t 代入式(1.54) 则可得到截击终止时刻的导弹、目标所有状态, 并得到脱靶量 y_{miss} , z_{miss} .

三. 地球曲面影响的修正

在 6-DOF 弹道计算中, 导弹位置在 ECS 中定义, 因此在计算射程以及计算大气参数时应该考虑到地球的曲面影响, 尤其是当

射程较大时，这种影响是严重的。

参考图1.8，设 x_m, y_m 为弹壳质心的射程及射高，那么导弹的海拔高度 H_m 及地而射程 R_m 为：

$$R_m = r_e \cdot \eta + H_m \cdot \eta$$

$$H_m = r - r_e$$

其中， $r = (x_m^2 + (r_e + y_m)^2)^{1/2}$, $\eta = \tan^{-1} [x_m / (r_e + y_m)]$
 η 为地心角。

§2.9. 程序 GM6

GM6 涉及的方程及模型概括有：13个
弹道微分方程（包括质量方程 $dm/dt = -m\zeta$ ），见
式(1.16)、式(1.17)、式(1.25)、式(1.28)'；几何关系方程，
见式(1.2)~式(1.4)以及目标运动模型(§2.4)、控制
器模型(§2.5)、末制导方法(§2.6)、中间制
导方法(§2.7)。由此实现了程序 GM6，以FORTRAN77
写成，在IBM PC/XT 以及 Micro-VAX II 上编译运行。

GM6 的地球引力模型、大气模型以及自动
积分模块引用了 LOB 程序的相应模块[1.5]。
本节主要介绍 GM6 中使用的气动系数插值
方法以及模块化设计的优点。

一、气动力系数插值方法简介

由于本使用的气动力系数 C_d, C_m, C_n 为
二元函数表格形式，即以马赫数 M 及攻
角 α 为变量 ($C_d(M, \alpha_T), C_n(M, \alpha_T), C_m(M, \alpha_T)$)。因此在

给定 M, α_T 条件下就涉及到一个二维表插值问题。

通常我们可以使用线性插值的方法，即先在一 α_T 方向上如存储数 M ，插值得到一个给定 M 下的关于 α_T 的点列，再仅用 α_T 在此点列中插值就可以得到二维表的插值。如果已知数据点较少且较典型，这样做是可以的。但如果数据点较多，则可以在一 α_T 方向上将数据点以样条函数拟合来表示，然后同样插值得到关于 α_T 或 M 的点列，再进行多点插值如 Lagrange 插值。这样可以减少数据存储量而且可以提高插值精度。后者可形成一个标准的二维表插值技术，使用灵活，但需要与之配套的样条拟合程序。

上述两种二维表插值方法都已形成面向用户的调用模块，并附有一套较好的样条拟合软件。

至于单变量的插值问题，可以使用最简单的直线插值，如果数据点较多，则同样可以使用样条拟合的办法将这些数据点以样条函数来表示，可减少数据存储量。

二、GM6 模块化设计简介

这里没有打算将 GM6 设计写成一个包含各种各样的目标运动规律、各种各样的控制系统以及寻引规律的软件包，只是希望 GM6 能成为导弹仿真的基本软件。即一旦详细

定义了控制系统、制导规律、目标运动以及运动特性、火箭助推等，能使得用户很快地修改GM6的相应模块进行弹道计算，免得需要不断地进行诸如6-DOF弹道方程、积分模块等工作。因此GM6对一些可能变动的模块如气动力模块、大气模块、寻引控制模块、火箭推力等，定义了它们与主弹道固定不动部分的输入输出信息，使得这些用户模块仅需要利用主弹道模块的输入信息以及自身输入信息，完成指定的输出信息（主弹道模块所要求的）即可。至于用户模块自身的输入是在模块初始化时完成的，由用户安排。

需要注意的是，当用户模块中如控制系统中有附加的微分方程时，GM6中也安排了这些用户模块附加微分方程与弹道方程同步积分的环节，具体应用步骤及示例见[1.2]。

关于用户模块的详细描述请参见[1.2]。至于GM6现有的用户模块可作为一个用户使用实例，可供参考。

总之，通过本文的努力，使得GM6有望成为一个较有推广使用价值的工具性软件。

第三章. 弹道可行性的计算.

3.1 概述

上面介绍了SRC对炮射反飞机导弹的初步定义以及一个通用的导弹仿真程序GM6及其模型。本章的弹道可行性计算，由于涉及到大量的图表数据，限于篇幅，这里仅能作一个简单的介绍。

从SRC的定义出发，首先要对导弹自由飞行情况进行计算，了解其射程以及初始射角、火箭点火时刻等参数的初步决定。然后考察导弹的控制条件下的半径改向以及控制器参数的决定。最重要的是末制导试验，证实末制导可以在较大范围内引导导弹击中飞机。当然，要击中飞机，导弹末制导开始时刻导弹与目标的相对位置要较合适，这正是中间制导的任务，最后将末制导、中间制导结合起来对给定条件进行计算，证实可以击中目标。

更详细的技木数据，请参阅[1.4]。

3.2. 自由飞行试验.

为了决定初始射角 θ_0 要注意两点，一是希望射程尽可能大，二是射高不能太高，过高则易因空气稀薄而造成中间制导效率降低。因此要在这两者之间作一折衷。下表是无火箭助推时导弹射程、射高与 θ_0 的关系。

表9:

(单位:公里)

θ_{V_0} (度)	射程	射高	飞行时间
35	102.4	22.0	137.0
45	134.7	36.8	177.0
55	143.1	53.6	213.0
65	125.0	69.6	242.1

这里取 $\theta_{V_0}=45^\circ$, 进行下面的计算。

为了得到较好的关火时刻, 使射程尽可能大, 这里作了几次计算, 得到下表:

表10 (单位:公里) ($V_0=1700 \text{ m/s}$, $\theta_{V_0}=45^\circ$)

点火时刻 T_i (秒)	8	11	14	17	20
射程	202.7	204.4	205.1	204.7	203.7

以下计算, 火箭关火时刻取为 $T_i=11$ 秒, 弹此时射程可达 200 公里左右。

3.3. 控制器增益的决定

- 平衡攻角

平衡攻角是某一舵偏角作用下的平衡条件所需要的攻角。平衡攻角 α_{trim} 的大小与舵偏角 δ 的关系是由弹的物理特性以及气动力特性所决定的。由平衡条件:

$$Q \cdot S \cdot l \cdot C_M(M, \alpha_{trim}) + Q \cdot S \cdot l \cdot C_{ws}(M) \cdot \delta = 0 \quad \dots (57)$$

由于 $C_M(M, \alpha_{trim})$ 为二维表格, 可由迭代方法得

到 $\alpha_{trim} - \delta$ 关系，其中， $Q = \frac{1}{2} \rho V^2$ 动压头； S : 参考面积， $S = \frac{\pi}{4} d^2$ ； l : 参考长度， $l = d$ 。

图 1.15 为 $\alpha_{trim} - \delta$ 曲线簇，以 Mach 数为参数。其中 $\alpha_{trim} - \delta$ 不是直线关系，这是因为 $C_M(\alpha_t, M)$ 的非线性造成的。

二、控制器增益的决定

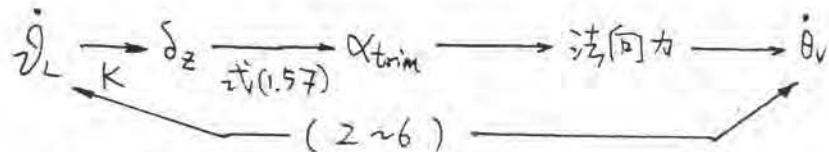
控制器的增益 K 不是随便确定的，它是与控制力及力矩系数、气动力及力矩系数、导弹速度、空气密度及弹的物理特性所决定的。由比例导引律

$$\dot{\theta}_v = a \cdot \dot{\vartheta}_L \quad (\text{见式(1.40)})$$

比例导引系数数 a ，由实际经验 a 应在 $2 \sim 6$ 之间。舵偏角 δ_z 为：

$$\delta_z = K \cdot \dot{\vartheta}_L$$

为决定控制器增益，这里仍使用平衡条件，在平衡条件下， $\dot{\theta}_v$ 与 $\dot{\vartheta}_L$ 的关系为：



所以，由

$$\begin{cases} m \cdot V \cdot \dot{\theta}_v = N_a + N_c \\ N_a = Q \cdot S \cdot C_N(\alpha_{trim}, M) \\ N_c = Q \cdot S \cdot C_{N\delta}(M) \end{cases} \quad \text{-- (1.58)}$$

$$\text{得到: } \dot{\theta}_v = K \cdot C_p(M, \delta) \cdot \dot{\vartheta}_L \quad \text{-- (1.59)}$$

$$\text{其中, } C_p(M, \delta) = \frac{\rho V S}{2m} \cdot \left[C_{N\delta}(M) - C_N(\alpha_{trim}, M) \cdot C_{M\delta}(M) / C_M(\alpha_{trim}, M) \right] \quad \text{-- (1.60)}$$

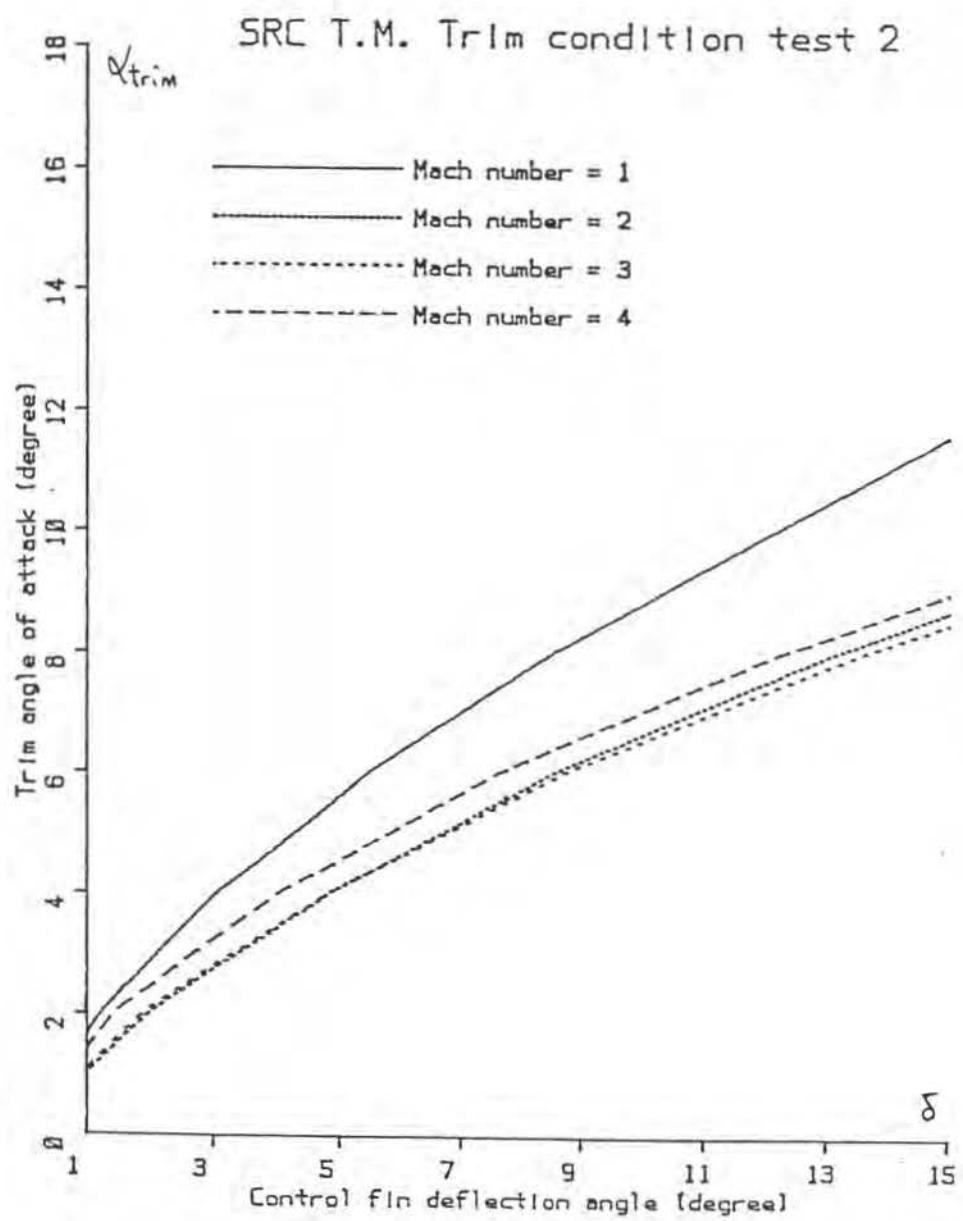


图 1.15 平衡攻角与相应舵偏角的关系

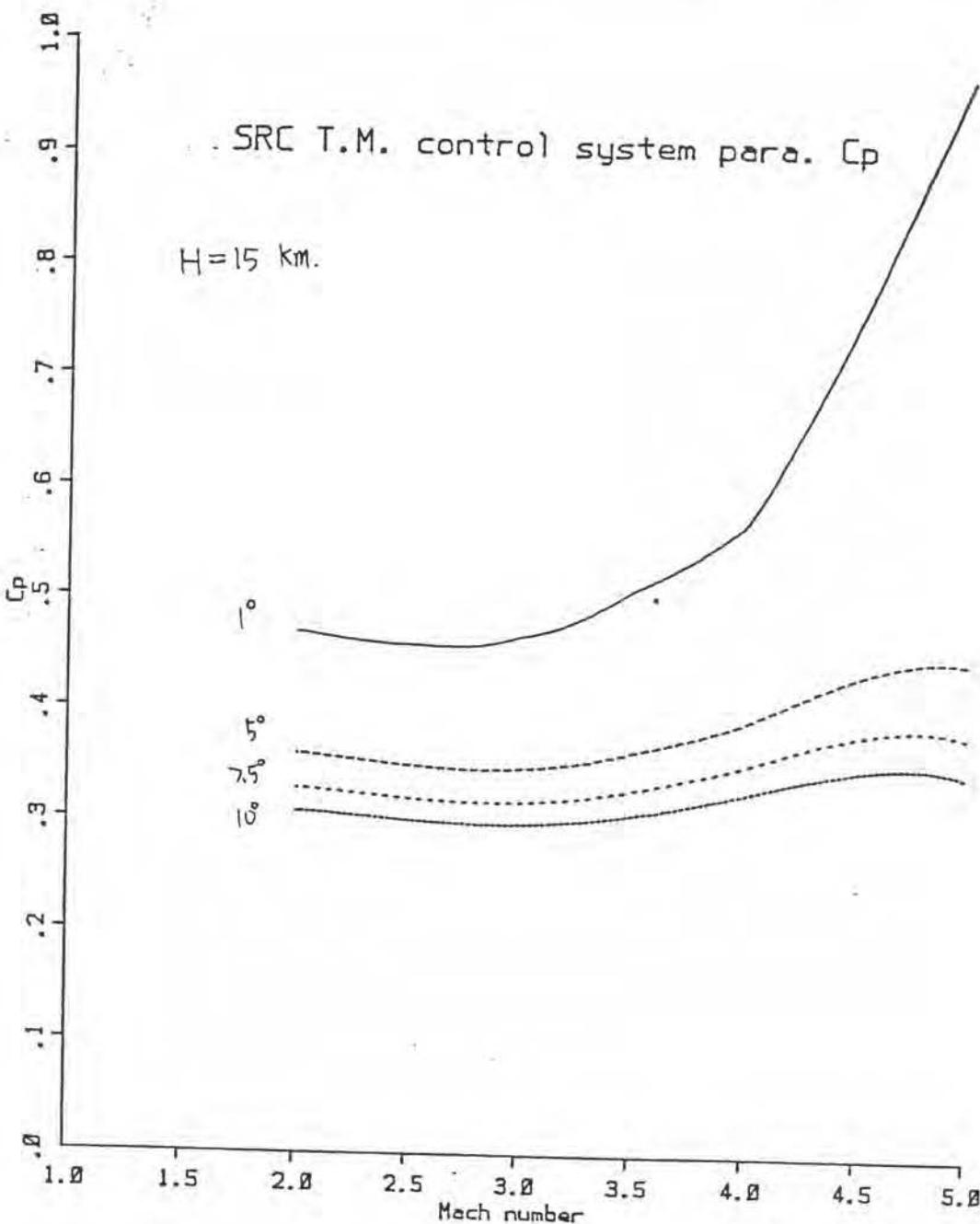


图 1.16. 不同航偏角条件下, $C_p - M$ 曲线.

设 $H=15 \text{ km}$. (末制导参考高度), 则得制导比 C_p 对马赫数 M 的对不同舵偏角 δ 的曲线簇, 见图1.16 取 $\delta=10^\circ$, 则 $C_p=0.3$. 若取比例导引系数 a 为 3.6, 则制导器增益 K 应取为 12. 本文以下计算均采用 $a=3.6$, $K=12$.

3.4. 末制导试验.

末制导试验是通过大量的计算以找出可击中目标的导弹——目标相对位置范围, 以及有效击中目标范围。

一. 目标在 10 km. 高作直线飞行

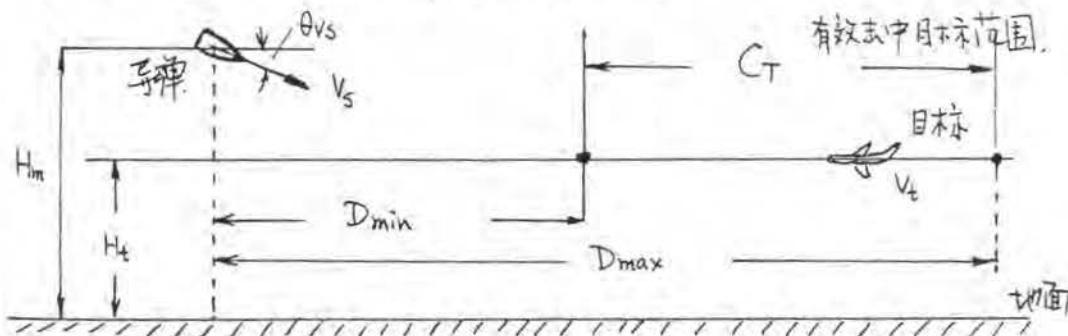


图1.17 末制导时刻导弹、目标相对位置图.

目标运动速度 $V_t = -680 \text{ m/s}$, $H_t = 10 \text{ km}$, 导弹末制导开始时 $V_s = 1138 \text{ m/s}$, $\theta_{V_s} = -30^\circ$, $H_m = 15 \text{ km}$. 如图1.17 图示。

记 D_{\min} 为末制导开始时导弹、目标最小有效相对距离. D_{\max} , 同 D_{\min} , 为最大有效相对距离. 此时

$$D_{\min} = 12.5 \text{ km}, \quad D_{\max} = 60 \text{ km}, \quad C_T = 47.5 \text{ km}.$$

当改变末制导开始时刻的导弹高度, 取 $H_m = 20 \text{ km}$.

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

此时, $V_s = 1147 \text{ m/s}$, $\theta_{Vs} = -27^\circ$ 则有

$$D_{\min} = 20 \text{ km.}, D_{\max} = 80 \text{ km.}, C_T = 60 \text{ km.}$$

因此可見, 末制导开始时刻的导弹高度大一些可以加大命中目标的机动范围。以下的计算使用 $H_m = 20 \text{ km.}$

二. 目标作之字形机动飞行。

目标运动线速度为 680 m/s , 半圆半径为 12 km. , 机动过载 $\bar{g}_{nt} = (V_t^2/R_{zig})/g = 4$. 目标所在高度恒定为 10 km. 此时

$$D_{\min} = 30 \text{ km.}, D_{\max} = 50 \text{ km.}, C_T = 30 \text{ km.}$$

三. 目标作机动飞行——俯冲运动

这里假设目标先在 10 km. 高度作直线运动, 然后俯冲至水平面作之字形机动。计算表明, 这种情况下, 末制导有效命中目标范围变小。结果为

$$D_{\min} = 41 \text{ km.}, D_{\max} = 51 \text{ km.}, C_T = 10 \text{ km.}$$

图1.17 为 $D_{\min} = 41 \text{ km.}$ 情形下, 目标机动直线飞行 1 km. 后俯冲, 俯角为 45° , 终止俯冲高度为 20 km.

图1.18 为侧向弹道, 图1.19 为纵向弹道, 图1.20 为导弹全攻角对时间曲线。

四. 目标作侧向直线飞行。

设目标以 $V_t = 680 \text{ m/s}$ 沿侧向飞行, 在这种情况下, 目标不能被命中。这是由于是

SRC T.M. terminal guidance.

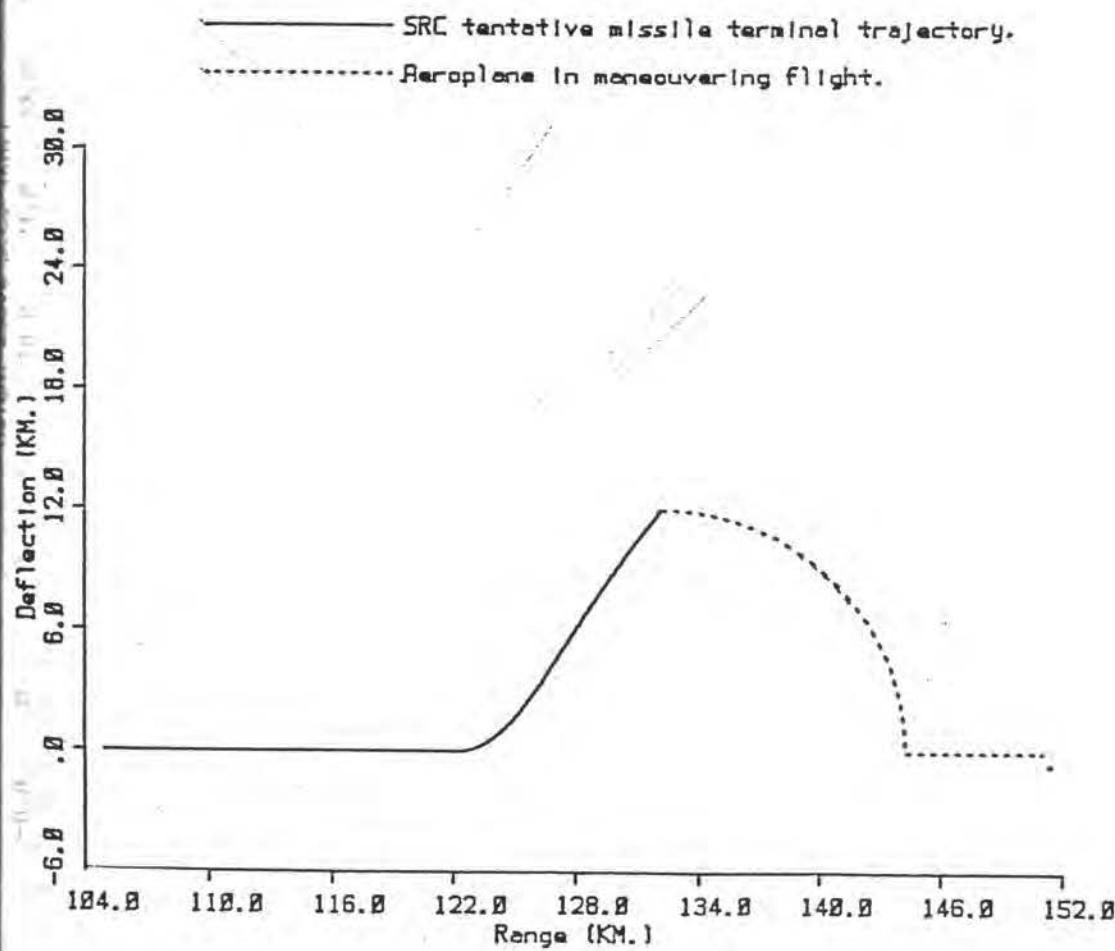


图 1.18

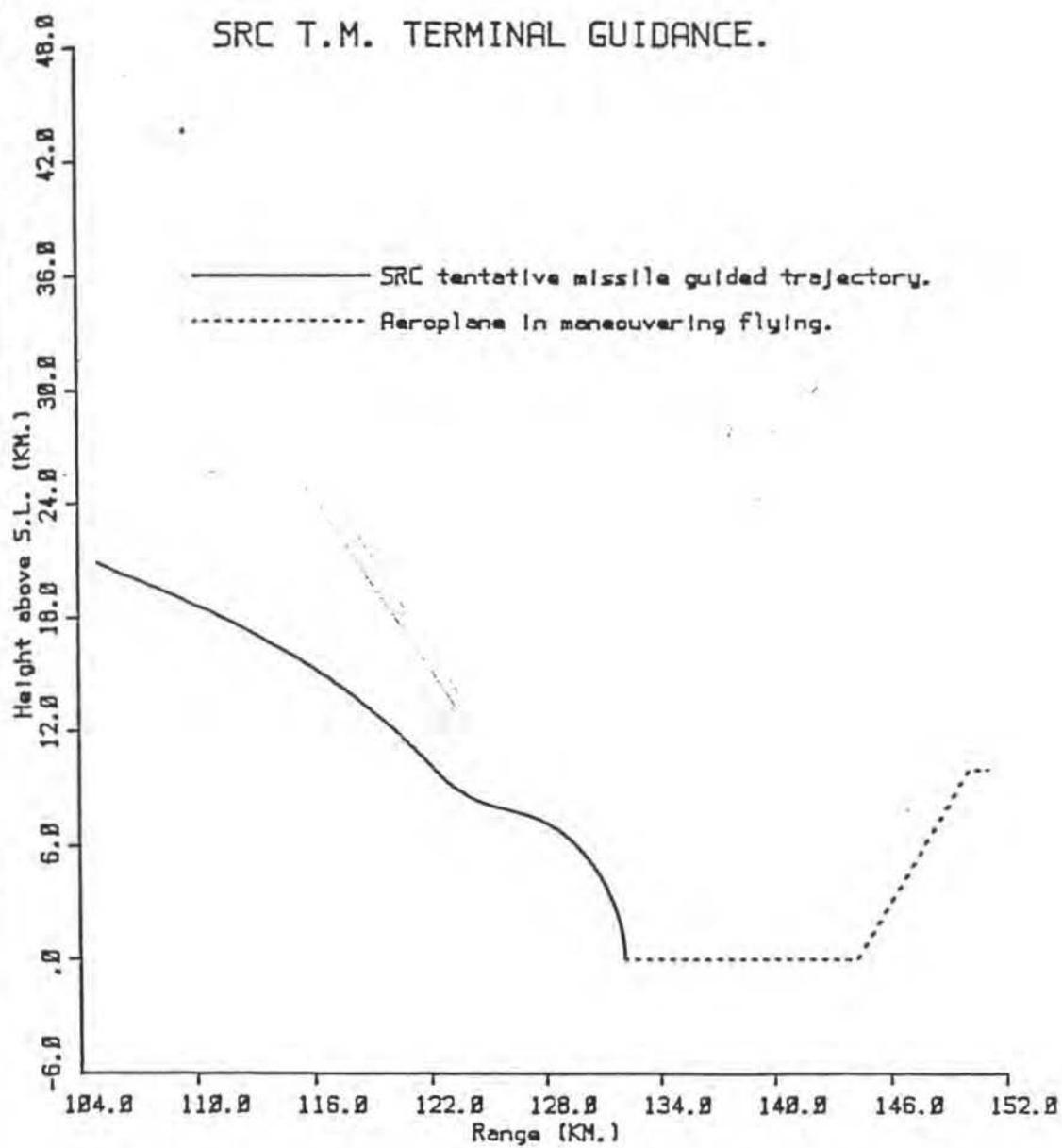
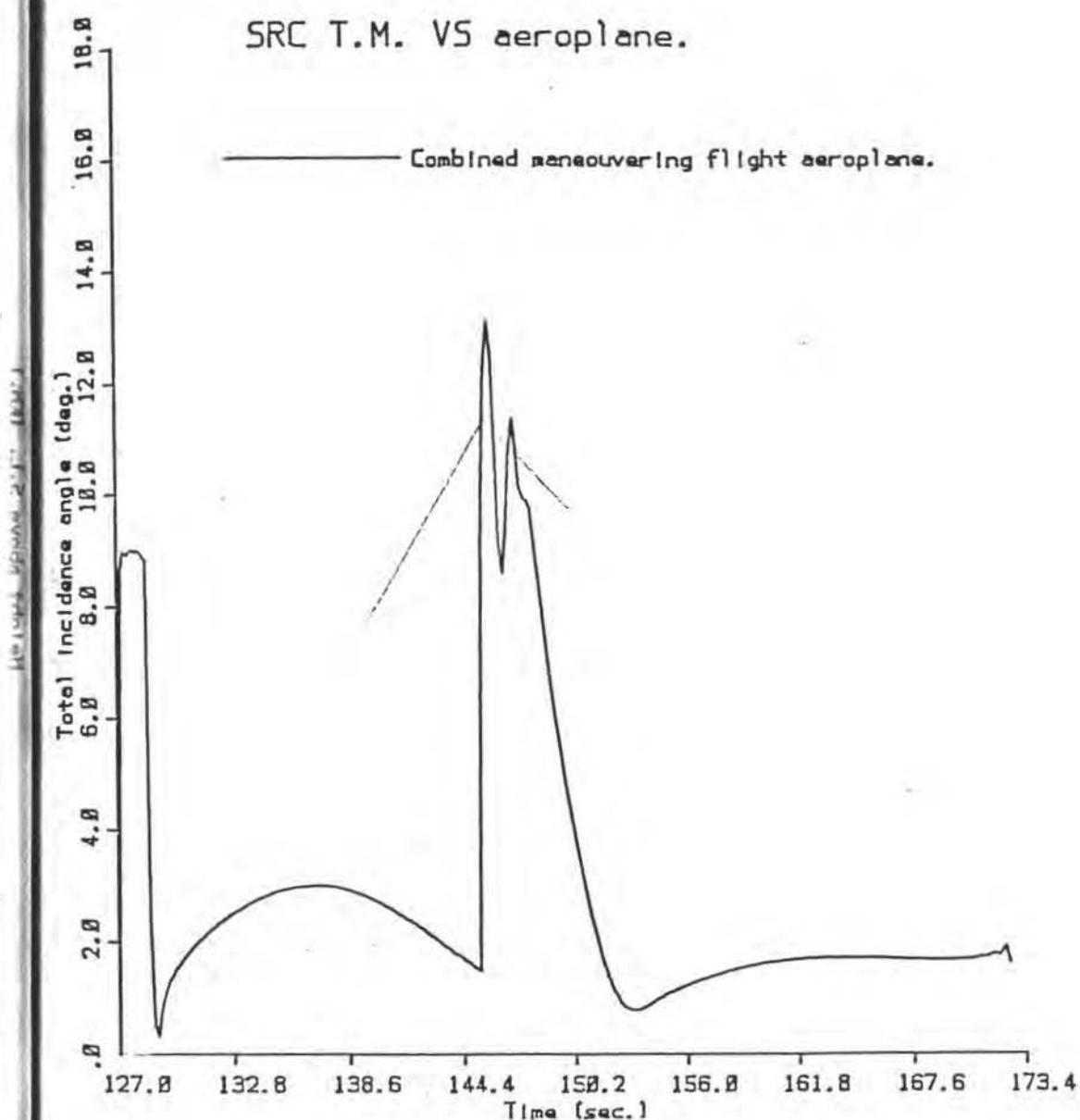


图 1.19



[图] 1.20

弹的速度在纵面上，要导引追上如此快速的侧向运动的目标，是困难的。导弹速度技跟不上。

如将目标侧向运动速度降为 500 m/s (约1.5
马赫)，那么有

$$D_{\min} = 20 \text{ km}, D_{\max} = 50 \text{ km}, C_T = 30 \text{ km}$$

3.5 中间制导试验。

上一节对末制导导弹击中目标的有效范围进行了计算，可知只要末制导开始时的导弹与目标相对位置在这有效圈中即可使导弹击中目标。因此中间制导的任务就是导引导弹至一合适的位置开始末制导，以保证末制导能成功地使导弹击中目标。

这一节中，设导弹以 1700 m/s , $\theta_{00} = 45^\circ$ 发射，发射后第11秒火箭开始工作，火箭工作6秒结束后，中间制导开始。这里目标运动都假设在 10 km 高空作直线运动，通过一些直观的计算以表明中间制导是起作用的。

一、目标作加速运动。

假设目标在中间制导开始时的初速为 -300 m/s ，若以此作常速运动，则当中间制导结束时的导弹目标相对距离为：

$$D_t = 24 \text{ km.}$$

若以 -3 ft./s^2 为加速度，则 $D_t = 25.5 \text{ km.}$ 可见 D_t 都在导弹命中目标的有效范围内。

在中间制导计算中，取 $c_{g1} = c_{g2} = 80$, $x_r = -5 \text{ km}$ 见式(1.51)。进一步的计算表明，即使目标运动的加速度达 -3 m/s^2 ，中间制导也能保证末制导成功地截击目标。

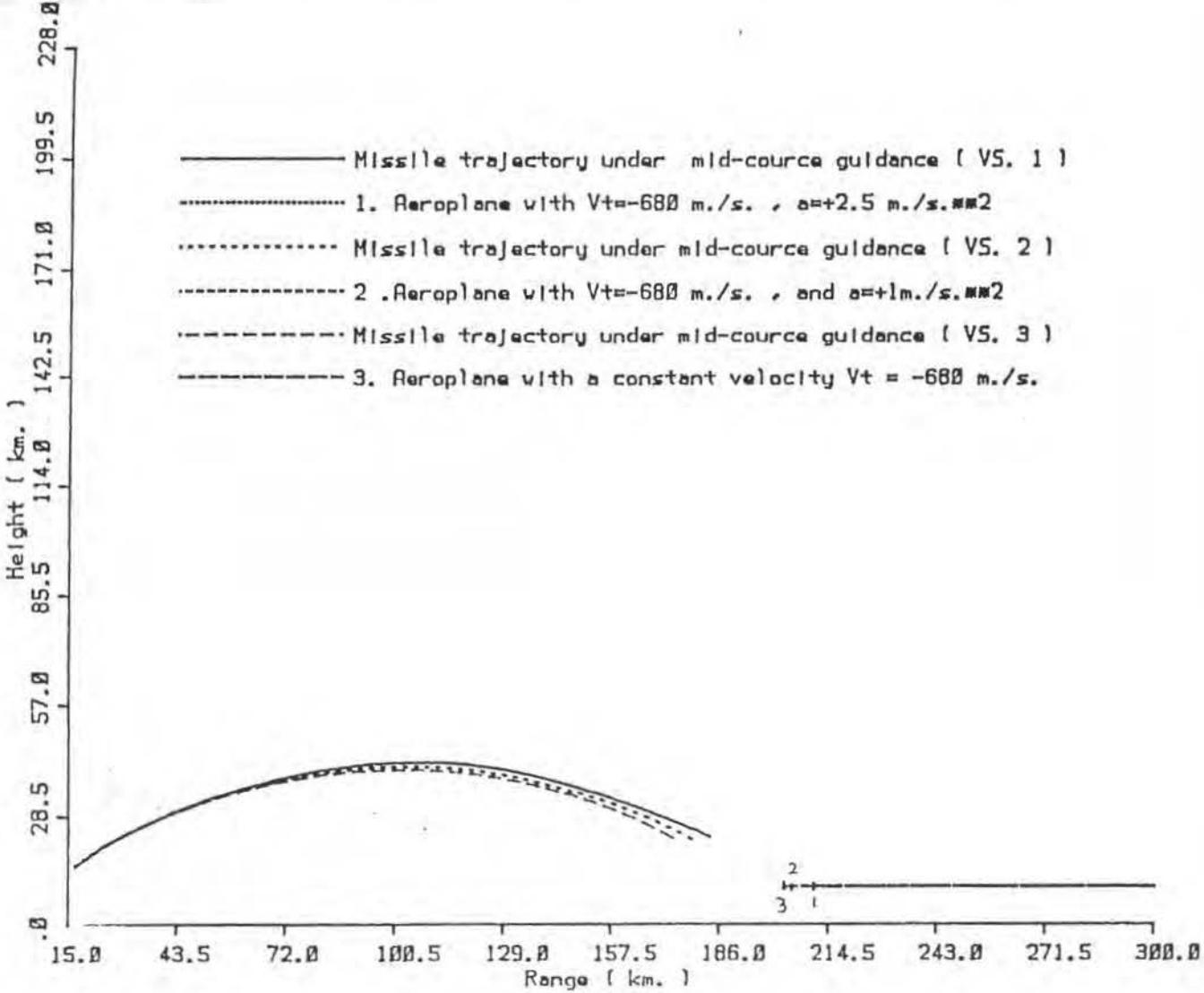
二、目标作减速运动。

目标在中间制导开始时的初速为 -680 m/s 若以此速度作恒速直线运动，则当末制导结束时， $D_t = 28 \text{ km.}$ ，若目标作减速运动，

$$a_t = 1 \text{ m/s.} \quad \text{则 } D_t = 27 \text{ km.}$$

$$a_t = 2.5 \text{ m/s.} \quad \text{则 } D_t = 26 \text{ km.}$$

可见，中间制导是可以将导弹引导到合适的位置处开始末制导以保证末制导成功。见图 1.21.



北京工业学院研究生院毕业论文用纸

§3.6. 组合试验——中间制导和末制导。

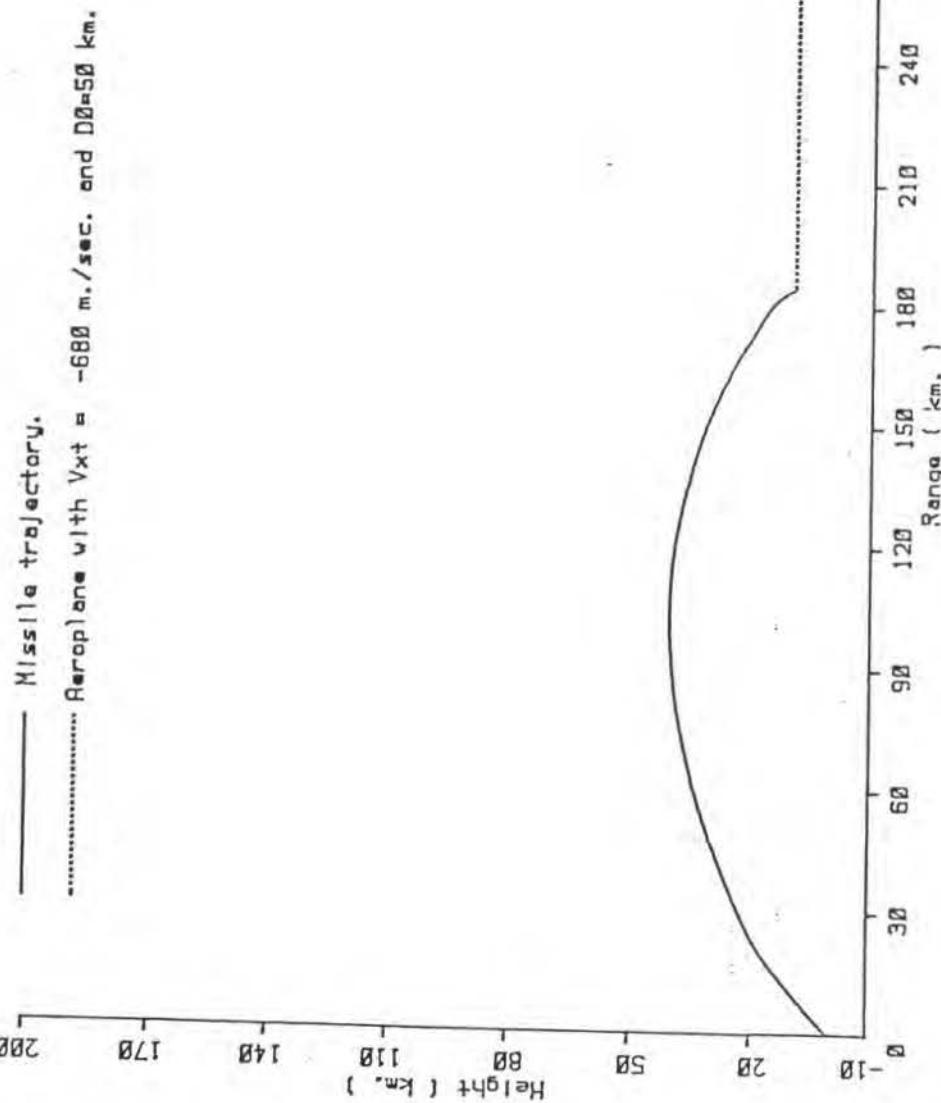
这里的组合试验主要由 SRC 建议。假设目标以 -680 m/s 飞来，固是高按 10 km ，固是侧偏 50 km ，由于目标从 300 km 外飞来，固是 50 km 的侧偏 50 km ，可满足射面与目标成 10° 左右的角度。

导弹以 1700 m/s 发射，射角为 45° ， 11 秒时点燃火箭发动机，燃烧 6 秒结束后中间制导开始，直刮下降到离地面 20 km 处切换至末制导，计数表明，这种情况可以击中。全部导弹飞行时间为 190.4 秒。

图 1.22、图 1.23 为导弹命中目标的纵向、侧向弹道图形。

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

Mid-course guidance and terminal guidance test 1



1.22

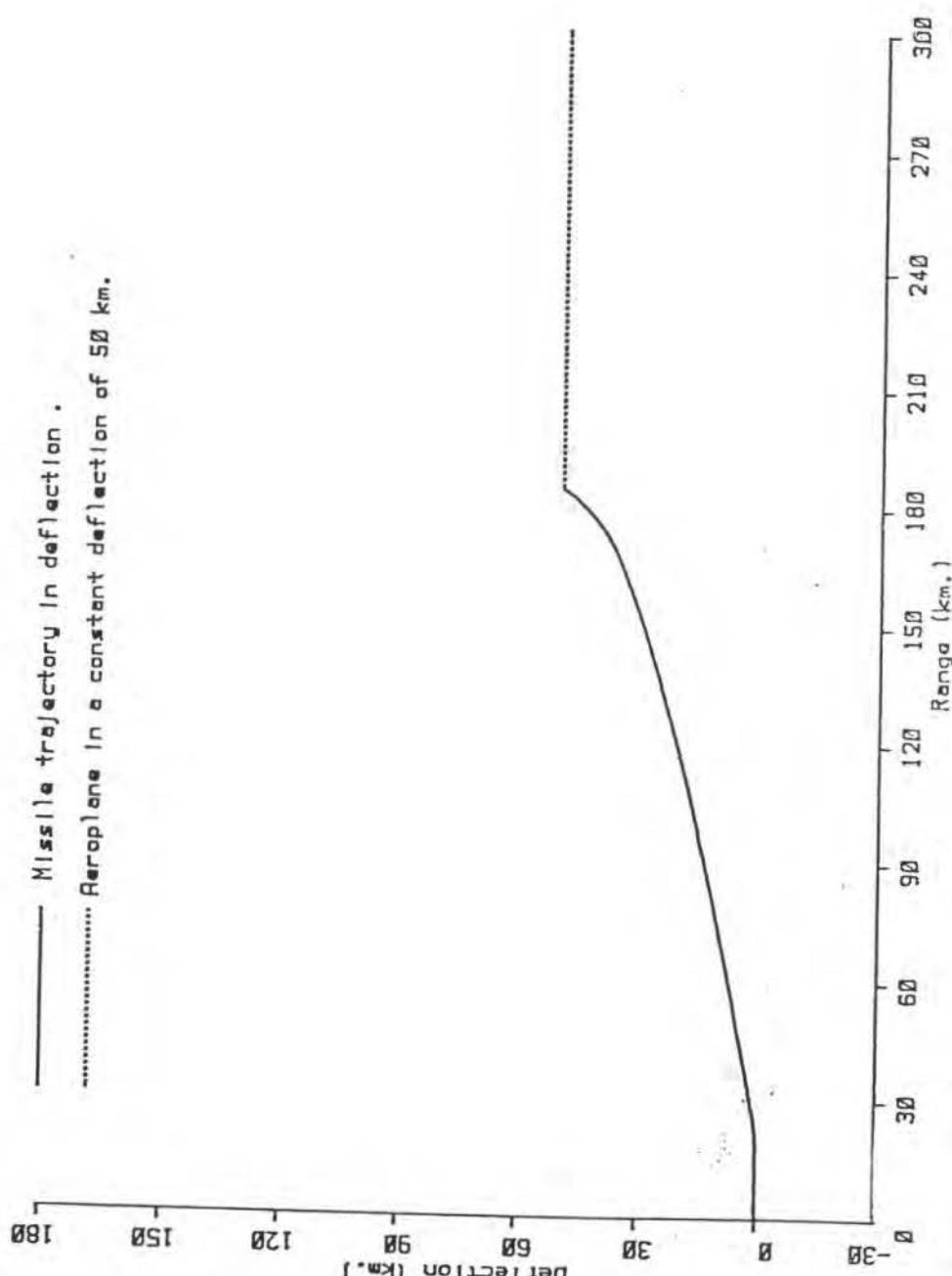


图 1.23

3.3.7 结论

通过这一部分的工作，肯定了 SRC 提出的炮射反飞机导弹弹道是可行的。然而这仅是一个粗略的计算机仿真结果。要使这个 SRC 定义的导弹投入生产还有很长的路要走，还要经过更多、更复杂、更细致的论证才能决定是否肯定进行研制。本文的工作只能说是第一步的工作，只能作为进一步可行性论证时的参考。本部分的价值就这一点。真正有用的是通用性较强的导弹仿真程序 GM6，在今后的方案论证中，GM6 仍然可以发挥其作用的。它仅要求用户修改某些已清晰定义了的“用户模块”即可。当然，GM6 对其它导弹也是可以使用的。

第二部分. (Part 2)

革巴板数据处理.

(Yaw Card Data Reduction)

第一章 概述

1.1. 气动辨识问题

我们都知道，一子弹在投入实战之前，必须经过一系列的试验以检验或证实其性能。一般地，系统要经过静态试验、气动力试验、飞行试验等，但对系统的最后评价仍应由其实飞行试验来决定。

要知道弹的特性，如稳定性等，就必须知道弹的气动力特性。虽然理论计算、风洞测试和靶道试验都可以得到气动力系数，但总的说来，空气回动力特性的理论计算方法在工程实际上是使用理论计算与已有实验数据图表查找相结合的方法。精度比较低，一般仅在初步设计阶段使用；风洞试验一般仅用弹的模型，而且风洞的壁间干扰以及吹风条件与真实大气的区别使得所测气动力系数与实际子弹气动力特性系数有区别，一般也只能较好地得到稳定性系数，而对动态系数的测量精度就很低了，所以这就提出了气动辨识的问题，即从真实飞行试验数据直接提取气动力系数或者利用真实飞行试验数据处理结果来对风洞测量处理结果进行修正，这是一项很有实际意义的工作。

1970年Chapman和Kirk [2.1]提出了一种分析弹道数据的一般方法，它实际上是一种在最小二乘意义下的微分校正方法。1985年

我国从SRC公司引进的GLOB软件采用这种方法成功地提取了弹丸飞行阻力系数曲线^[2.3]。1985年，祁裁旗提出了多段样条拟合方法处理雷达测速数据，从而得到亚、跨、超音速区连续的阻力曲线，克服了GLOB拟合函数机动性不足及不收敛的缺点，充分利用了雷达测速数据所提供的阻力对弹道影响的信息，使阻力系数 C_d 的辨识达到一个新水平^[2.4, 2.5]。1986年，刘中淳提出了进一步利用雷达测速数据初始段攻角衰减过程对速度影响的信息来对马格努斯力矩系数 C_{mpx} 或俯仰阻尼力矩系数 C_{mgx} 进行修正的方案^[2.5]，但^[2.5]中声明，由于已知的全攻角衰减过程所提供的信息有限，不可能同时提取得到 C_{mpx} 、 C_{mgx} ，只能设定已知其中一个来对另一个进行修正。

从50年代开始，E.W. Greenwood就建议CARDE计划的主持人G.V. Bull等，使用靶板实验来估计弹的稳定性因子及气动力特性以检验理论计算。^[2.9]实际上，这是通过将炮水平放置，使弹穿过前面规则排列的靶板，通过靶板上留下的印记推算弹的初始攻角运动过程，并由这个过程来拟出攻角运动快慢运动模态的初始幅值、初始相位、转动频率及衰减因子，从而推出气动力系数 C_{ma} 、 C_{mpx} 、 C_{mgx} 等。SRC 1971年开发了处理靶板试验数据处理软件YC^[2.8]，直到1985年SRC

将这种试验方法及数据处理程序信给中国，这种靶板试验数据处理仍是线性定常假设下的基于角运动解析解的拟合方法，显然在有高速计算机的今天，我们完全可以直接以气动力系数作为拟合参数，使用自由度弹道模型数值求解来拟合实测攻角运动过程，从而辨识出炮口扰动以及一些重要的气动力系数如 C_{md} , C_{mpx} , C_{mgx} , C_{dx} 等。这就是本文的方法及相应的程序 NYC。NYC 考虑了 SRC-YC 程序不能考虑的非线性气动力系数 C_{md3} , C_{dx3} 等以及转速、速度下降等因素的影响。

靶板试验可以说是介于自由飞行试验与风洞试验之间的真实打靶试验。借助先进的测试设备，只要能得到弹道的攻角、侧滑角过程，就可以使用本文的方法提取气动力系数。SRC 介绍的靶板实验设备是简单的，无论 SRC-YC 还是本文介绍的 NYC 程序都是有推广使用价值的。随着测试精度的提高，气动力系数的提取精度也将随之提高。

[2.6, 2.7] 中介绍了一种使用最大似然法处理自由飞行数据的方法，但它是借助高精度的先进测试设备，假设能够测到射程、射高、偏航以及俯仰、偏航、滚转角位置对时间的变化过程，且测试长达 50~131 个，使用六自由度模型可辨识出几乎所有的线性、非线性气动力系数。虽然这是据报道所知，

具体的資料还未能得到，但可以相信，如果能精确地已知炮运动的所有状态且有足够的采样点，则总能通过拟合的办法来了解这些运动状态的所有参数。本文提供的方法只是假设已知攻角、侧滑角对距离的过程。通常靶板试验的测试点为30点以下。

3.2 靶板靶道试验简介

靶板靶道试验设置见图2.1。第一子靶板离炮口的距离 s_0 的大小并不是很重要，只要不被炮口火光毁坏即可。第一子靶板与最后一子靶板间的距离应尽可能长，这样有助于最后数据处理的转换。为得到 α_m 及舵螺稳定因子 S_g 的可靠性，靶道长应至少满足角运动一个周期。为可靠地得到阻尼力矩系数，靶道长需要满足几个角运动周期。

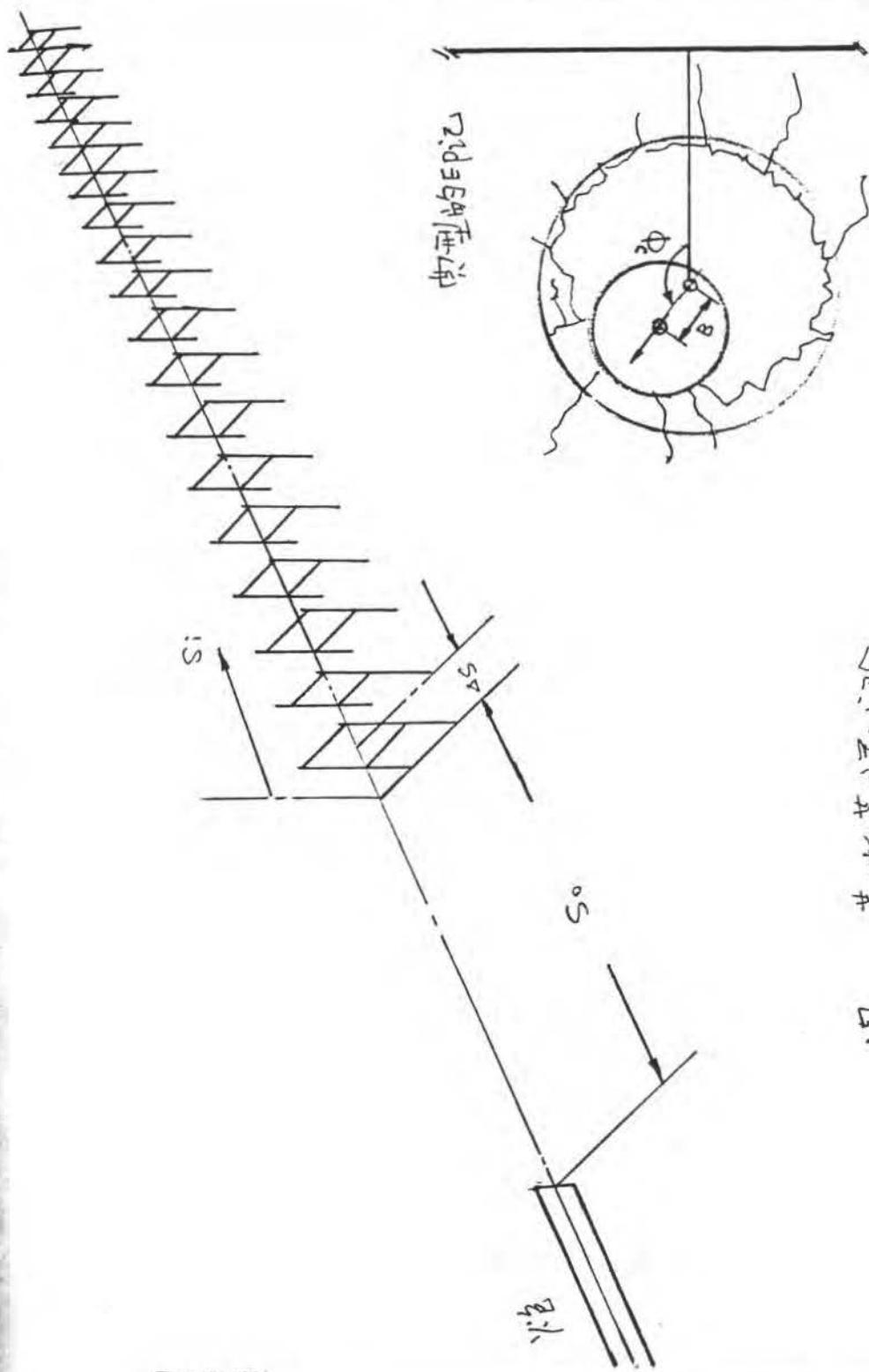
由图2.2知，全攻角值引为

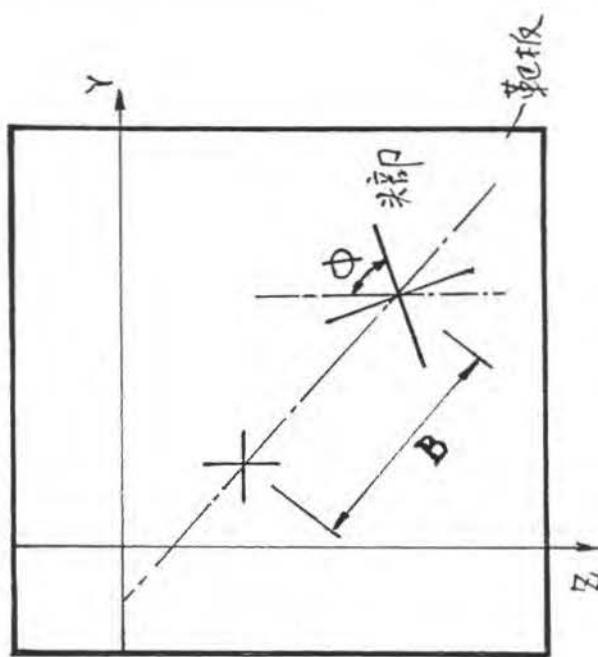
$$\alpha_T = |\tilde{\gamma}| = \sin^{-1}(B/L) \quad \dots (2.1)$$

其中， B 、 L 见图2.2的解释。 α 角为俯仰偏航面的方位角，见图2.2，有：

$$\tilde{\gamma} = \alpha_T \cdot e^{i\phi}, \text{ 其中, } \tilde{\gamma} = \alpha + \beta \\ \text{即, } \alpha = \alpha_T \cdot \sin \phi, \quad \beta = \alpha_T \cdot \cos \phi \quad \dots (2.2)$$

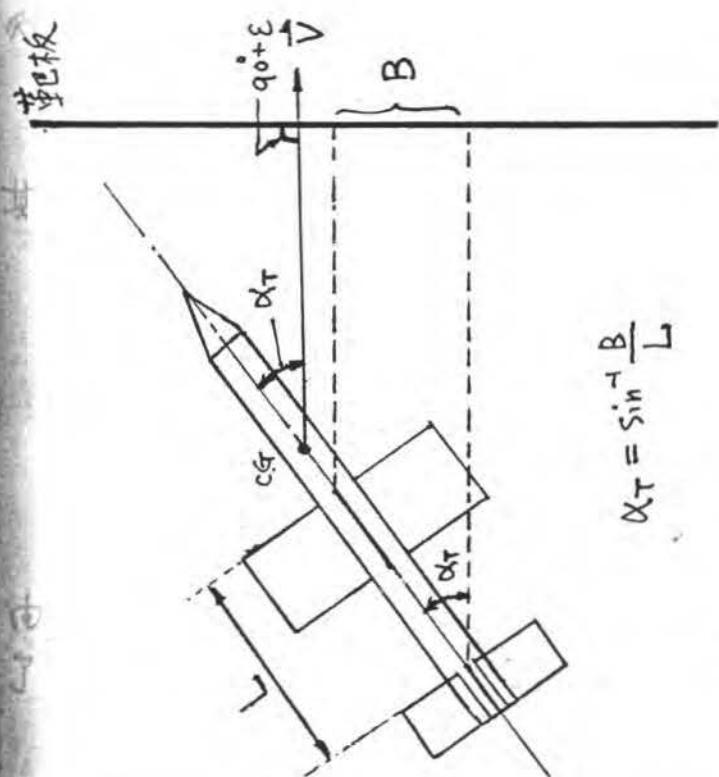
总之，无论通过简易的靶板试验还是通过光学系统测量，只要得到攻角运动过





靶板与弹道垂直。

$$\alpha = \alpha_T \cdot \sin \phi, \quad \beta = \alpha_T \cdot \cos \phi$$



全攻角面内

|图 2.2. 以角运动的测量量

程的数据，就可以从中处理出对角运动作过贡献的运动系数。

第二章 靶板数据处理——非线性模型方法.

§2.1 引言.

[2.8]中介绍了一种基于对角运动解析解的拟合方法。它将弹的角运动近似看成一个线性时不变微分方程的解，由[3.8]

$$\tilde{\xi}'' + (H - iP) \cdot \tilde{\xi}' - (M + iPT) \cdot \tilde{\xi} = \tilde{D}_g \quad \dots (2.3)$$

$$\text{则}, \quad \tilde{\xi}(\bar{s}) = K_{10} \cdot e^{\lambda_1 \bar{s} + i(\omega_1 \bar{s} + \phi_{10})} + K_{20} \cdot e^{\lambda_2 \bar{s} + i(\omega_2 \bar{s} + \phi_{20})}$$

$$+ i\alpha_g + \beta_g \quad \dots (2.4)$$

其中, H, M, P, T 为弹的近似线性时不变系统参数

K_{10}, K_{20} 为模态向量的初始幅值 (rad.)

λ_1, λ_2 为模态向量衰减系数 (rad./cal.)

ϕ_{10}, ϕ_{20} 为模态向量初始方向角 (rad.)

α_g, β_g 为重力引起的稳态角分量 (rad.)

\bar{s} 为无量纲弹性系数 $\bar{s} = s/l$ (cal.)

由这种已知解析解函数来拟合(2.4)式中的 10 个参数。又因

$$P = \omega_1 + \omega_2, \quad J = \frac{1}{2}[(\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_1 - \omega_2)/(\omega_1 + \omega_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)]$$

$$M = \omega_1 \cdot \omega_2 - \lambda_1 \cdot \lambda_2, \quad H = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \dots (2.5)$$

所以气动力系数由

$$\left[\begin{array}{l} M = \left(\frac{\rho s l^3}{2 I_y} \right) \cdot C_{m\alpha}, \quad T = \left(\frac{\rho s l}{2 m} \right) \left(C_{L\alpha} + \frac{1}{2} K_x^{-2} C_{m\alpha} \right) \\ D = \left(I_x / I_y \right) \cdot \frac{\rho l}{V}, \quad H = \left(\frac{\rho s l}{2 m} \right) \left(C_{L\alpha} - C_{D\alpha} - \frac{1}{2} K_y^{-2} C_{m\alpha} \right) \end{array} \right] \quad \dots (2.6)$$

得到。其中，

$$K_x^{-2} = m l^2 / I_x, \quad K_y^{-2} = m l^2 / I_y$$

由拟合所得到的 H.M.P.T，不能从这 4 个参数中由 (2.6) 式 4 个代数方程同时解到 $C_{m\alpha}$, $C_{m\alpha}$, $C_{m\alpha}$, $C_{L\alpha}$, $C_{D\alpha}$ 及中这 6 个量，一般仅能得到 $C_{m\alpha}$, P , $C_{m\alpha}$, $C_{m\alpha}$ 而 $C_{L\alpha}$, $C_{D\alpha}$ 假设已知。

很明显，这军在作了线性时不变假设后才能间接地算出气动力系数。本文的非线性模型方法直接以气动力系数作为拟合参数，并使用六自由度弹簧模型，考虑所有因素，并且可以灵活地设定已知某几个气动力系数；拟合剩下的气动力系数，虽然，这种处理方法要更优越。

注意，这里 (*) 是对无量纲弹簧长度 s 的导数。

3.2.2. 弹丸运动的六自由度模型

一、复攻角运动方程

在靶板试验中测得的是一组攻角 $\tilde{\alpha}$ 随距离变化的数据点，为精确地描述弹的攻角运动，应采用 6 自由度模型。虽然刚体动力学 6 自由度模型可以精确地描述整个弹的运动，但其方程过于复杂且几何关系

不易处理。本文为方便地使用拟合方法，
采用下面的弹丸运动六自由度模型。

与刚体模型不同，这里偏航、俯仰改角
定义见图 2.3

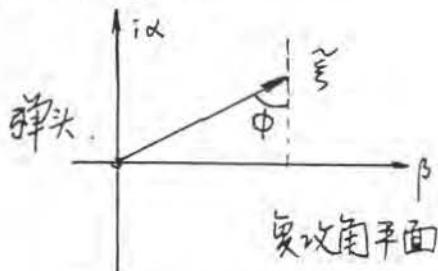


图 2.3 攻角的定义

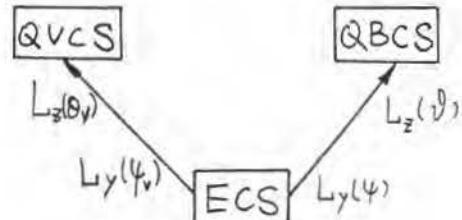


图 2.4 坐标系定义

$$\text{记 } \tilde{\xi} = i\alpha + \beta, \text{ 令}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{L\alpha} &= C_{L\alpha} + C_{L\alpha\tilde{\xi}} \cdot \alpha_T^2 \\ \bar{C}_{p\alpha} &= C_{p\alpha} \cdot (\rho l / 2V) \\ \bar{C}_{m\alpha} &= C_{m\alpha} + C_{m\alpha\tilde{\xi}} \cdot \alpha_T^2 \\ \bar{C}_{m_{p\alpha}} &= C_{m_{p\alpha}} \cdot (l / 2V) \\ \bar{C}_{d\alpha} &= C_{d\alpha} + C_{d\alpha\tilde{\xi}} \cdot \alpha_T^2 \end{aligned} \quad \dots (2.7)$$

$$\text{其中, } \alpha_T = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = |\tilde{\xi}|. \quad \dots (2.8)$$

定义准速度坐标系 QVCS 及准弹体坐标系见
图 2.4。所以 QVCS 中坐标 $(x_v, y_v, z_v)^T$ 与地面
坐标系 ECS 中的坐标 $(x_e, y_e, z_e)^T$ 的转换关系为

$$[x_v, y_v, z_v]^T = L_z(\theta_v) \cdot L_y(\psi_v) \cdot [x_e, y_e, z_e]^T \quad \dots (2.9)$$

x_v 与速度矢量 \vec{V} 重合, 而 $x_v o y_v$ 为垂直于地
面的平面, 则全攻角 α_T 可定义见图 2.5, 其
中 x_b 为弹轴, α_T 为全攻角平面 $x_b o x_v$ 与垂
直平面 $x_v o y_v$ 的夹角。所以由飞行力学原理

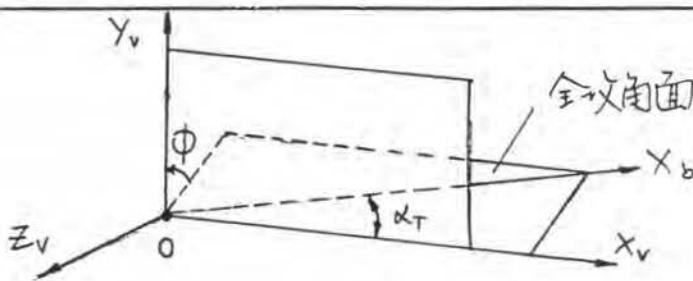


图 2.5 全议角定义及中角定义

有：

$$\begin{cases} \frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 s \cdot \bar{C}_{L\alpha}}{mv} \cdot \alpha + \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 s \cdot \bar{C}_{yp\alpha}}{mv} \cdot \beta - \frac{mg \cdot \cos \theta_v}{mv} \\ \frac{d\psi_v}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 s \cdot \bar{C}_{L\alpha}}{mv} \cdot \beta - \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 s \cdot \bar{C}_{yp\alpha}}{mv} \cdot \alpha \end{cases} \quad \cdots (2.10)$$

ω_y, ω_z 为弹体转动角速度，忽略 ω_y, ω_z 变化项
我们有：

$$\begin{cases} I_y d\omega_z / dt = \frac{1}{2} \rho v^2 s l \bar{C}_{m\alpha} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \rho v^2 s l \bar{C}_{mp\alpha} \cdot \beta + \frac{1}{2} \rho v^2 s l \bar{C}_{mg\alpha} \cdot \omega_z \\ \quad + I_x \cdot b \cdot \omega_y \\ I_y d\omega_y / dt = \frac{1}{2} \rho v^2 s l \bar{C}_{m\alpha} \cdot \beta - \frac{1}{2} \rho v^2 s l \bar{C}_{mp\alpha} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \rho v^2 s l \bar{C}_{mg\alpha} \cdot \omega_z \\ \quad - I_x \cdot b \cdot \omega_z \end{cases} \quad \cdots (2.11)$$

当小改角时，近似地有

$$\alpha = \vartheta - \theta_v, \quad \beta = \psi - \psi_v \quad \cdots (2.12)$$

$$\text{则}, \quad \omega_y = \dot{\beta} + d\psi_v / dt, \quad \omega_z = \dot{\alpha} + d\theta_v / dt \quad \cdots (2.13)$$

记

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \rho v^2 s \cdot \bar{C}_{L\alpha} / mv, \quad a_2 = \frac{1}{2} \rho v^2 s \cdot \bar{C}_{yp\alpha} / mv \\ b_1 = \frac{1}{2} \rho v^2 s l \cdot \bar{C}_{m\alpha} / I_y, \quad b_2 = \frac{1}{2} \rho v^2 s l \cdot \bar{C}_{mp\alpha} / I_y \\ b_3 = \frac{1}{2} \rho v^2 s l \cdot \bar{C}_{mg\alpha} / I_y, \quad b_4 = I_x \cdot b / I_y \end{cases} \quad \cdots (2.14)$$

由式(2.13)，有：

$$\begin{cases} \omega_z = \dot{\alpha} + a_1 \alpha + a_2 \beta - g \cos \theta_v / v \\ \omega_y = \dot{\beta} - a_2 \alpha + a_1 \beta \end{cases} \quad \cdots (2.15)$$

对式(2.15)两边对时间求导，忽略 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 动力系数

以及 ρ, v 对时间的导数，得到

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_z = \ddot{\alpha} + a_1 \dot{\alpha} + a_2 \dot{\beta} \\ \ddot{\omega}_y = \ddot{\beta} - a_2 \dot{\alpha} + a_1 \dot{\beta} \end{cases} \quad \dots \dots (2.16)$$

由(2.11)式又有

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_z = b_1 \alpha + b_2 \beta + b_3 \omega_z + b_4 \omega_y \\ \ddot{\omega}_y = b_1 \beta - b_2 \alpha + b_3 \omega_y - b_4 \omega_z \end{cases} \quad \dots \dots (2.17)$$

由(2.15)、(2.16)、(2.17)式得至：

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + (a_1 - b_3) \cdot \dot{\alpha} - (b_1 + a_1 b_3 - a_2 b_4) \cdot \alpha - (-a_2 + b_4) \cdot \dot{\beta} - (b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4) \cdot \beta \\ = -b_3 \cdot g \cos \theta_v / V \end{aligned} \quad \dots \dots (2.18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + (a_1 - b_3) \cdot \dot{\beta} - (b_1 + a_1 b_3 - a_2 b_4) \cdot \beta + (-a_2 + b_4) \cdot \dot{\alpha} + (b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4) \cdot \alpha \\ = b_4 \cdot g \cos \theta_v / V \end{aligned} \quad \dots \dots (2.19)$$

则(2.19) + i * (2.18)，有：

$$\ddot{\xi} + (A - iB) \cdot \dot{\xi} - (C + iD) \cdot \xi = \tilde{D}_g \quad \dots \dots (2.20)$$

其中， $\xi = i\alpha + \beta$, $(*) = \frac{d}{dt}(*)$

$$\begin{cases} A = a_1 - b_3, & C = b_1 + a_1 b_3 - a_2 b_4 \\ B = b_4 - a_2, & D = b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 \end{cases} \quad \checkmark \quad \dots \dots (2.21)$$

$$\tilde{D}_g = (b_4 - i b_3) \cdot g \cos \theta_v / V \quad \dots \dots (2.22)$$

式(2.20)为时间域的复数角运动微分方程。

由式(2.20)不难得出以弹道长度 s 为自变量的 $s-t$ 域复数角运动微分方程：

$$\ddot{\xi}'' + (H - iP) \dot{\xi}' - (M + iP\tau) \xi = \tilde{D}_g \cdot \left(\frac{1}{V^2}\right) \quad \dots \dots (2.23)$$

其中， $H = \bar{A} / V$, $P = B / V$

$$M = C / V^2, \quad P\tau = D / V^2 \quad \dots \dots (2.24)$$

由于 $(*) = \frac{d}{dt}(*) = \frac{d}{ds}(*) \cdot \frac{ds}{dt} = V \cdot (*)'$, 所以 $\dots \dots (2.25)$

$$(*)'' = (\ddot{*}) / V^2 - (*)' \cdot \dot{V} / V \quad \dots \dots (2.26)$$

因此，这里 $\bar{A} = \bar{a}_1 - b_3$, 其中 \bar{a}_1 的公式为：

$$\bar{a}_1 = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 s / m v \right) \cdot \left(\bar{C}_{L\alpha} - \bar{C}_d - \frac{mg \cos \theta_v}{\frac{1}{2} \rho v^2 s} \right) \quad \dots (2.27)$$

以上是简化的攻角运动方程。注意到式(2.3)与式(2.23)在形式上是相同的，但式(2.23)中的H.M.P.T是非线性近似时不变的。一般地，应采取式(2.23)，由式(2.14)、(2.20)、(2.24)，又设 ρ/v 近似常值则H.M.P.T中就不包含速度 v 的影响了，这样就可以克服(2.20)式很强的参数时变影响。

二. 弹道计时模型

以ECS作参考坐标系，令

$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ 为弹速度在ECS中的投影。

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ 为弹相对风的速度

$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$ 为风速在ECS中的投影。

则， $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$ ， $v = |\vec{v}|$ ，即为弹运动的动力学方程为：

$$\ddot{\vec{u}} = -\frac{\rho s}{2m} v \cdot \vec{v} \cdot \bar{C}_d + \frac{\rho s}{2m} \cdot v^2 \cdot \bar{C}_{L\alpha} \cdot \vec{\alpha}_e - \frac{\rho s}{2m} v \cdot \bar{C}_{p\alpha}^* \cdot (\vec{\alpha}_e \times \vec{v}) \\ + \vec{g} + \vec{\lambda} + \vec{g}'' \quad \dots (2.28)$$

其中， $\bar{C}_{p\alpha}^* = C_{p\alpha} \cdot \rho l / 2v + C_{y\delta\alpha} \cdot \delta$ $\dots (2.29)$

$C_{y\delta\alpha} \cdot \delta$ 为无控小舵的影响。

\vec{g} 、 $\vec{\lambda}$ 、 \vec{g}'' 同第一部分

$\vec{\alpha}_e$ 为动力平衡角，是全攻角 α_T 在ECS中的投影，参见图2.5有

$$\vec{\alpha}_e = \begin{bmatrix} \alpha_{ex} \\ \alpha_{ey} \\ \alpha_{ez} \end{bmatrix} = L_y(-\psi_v) \cdot L_z(-\theta_v) \cdot L_x(\phi) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \alpha_T \quad \dots (2.30)$$

得引：

$$\begin{cases} \alpha_{ex} = [-\cos\psi_v \cdot \sin\theta_v \cos\phi - \sin\psi_v \sin\phi] \cdot \alpha_T \\ \alpha_{ey} = (\cos\theta_v \cdot \cos\phi) \cdot \alpha_T \\ \alpha_{ez} = (\sin\psi_v \sin\theta_v \cos\phi - \cos\psi_v \sin\phi) \cdot \alpha_T \end{cases} \quad \dots (2.31)$$

最后还有转动方程

$$\dot{\beta} = (C_{dp} \cdot \frac{pl}{2v} + C_{L5} \cdot \delta) \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot \frac{sl}{I_x} \quad \dots (2.32)$$

其中， $C_{L5} \cdot \delta$ 为小舵的影响。

至此，弹丸运动的 6 自由度模型已建立，时间域的方程罗列如下：

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}} = -\frac{\rho s}{2m} \cdot V \cdot \vec{C}_d \cdot \vec{V} + \frac{\rho s}{2m} \cdot V^2 \cdot \vec{C}_{L2} \cdot \vec{\alpha}_e - \frac{\rho s}{2m} \cdot V \cdot C_{dp}^* \cdot (\vec{\alpha}_e \times \vec{V}) \\ \quad + \vec{g} + \vec{\lambda} + \vec{g}'' \\ [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T = \vec{u} \\ \dot{\beta} = C_{dp}^* \cdot (\frac{pl}{2v}) - \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot \frac{sl}{I_x} \\ \ddot{\xi} = -(A - iB) \cdot \dot{\xi} + (C + iD) \cdot \widetilde{\xi} + \widetilde{D}_g \end{cases} \quad \dots (2.33)$$

由于实际靶道试验中测得的是与距离的关系，所以上述 6 自由度模型应作变换至 S 域进行数值积分。S 域的方程为：

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}}' = \frac{1}{V} \cdot \left\{ -\frac{\rho s}{2m} \cdot V \cdot \vec{C}_d \cdot \vec{V} + \frac{\rho s}{2m} \cdot V^2 \cdot \vec{C}_{L2} \cdot \vec{\alpha}_e - \frac{\rho s}{2m} \cdot V \cdot \vec{C}_{dp}^* \cdot (\vec{\alpha}_e \times \vec{V}) \right. \\ \quad \left. + \vec{g} + \vec{\lambda} + \vec{g}'' \right\} \\ [x', y', z']^T = \vec{u}' / V \\ \dot{\beta}' = \frac{1}{V} \cdot C_{dp}^* \cdot \frac{pl}{2v} - \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot \frac{sl}{I_x} \\ \ddot{\xi}' = -(H - iP) \cdot \dot{\xi}' + (M + iP\Gamma) \cdot \widetilde{\xi}' + \widetilde{D}_g / V^2 \end{cases} \quad \dots (2.34)$$

或者： $\left[\begin{array}{l} \dot{\xi}' \\ \widetilde{\xi}' \end{array} \right]' = \frac{1}{V} \left[-(A - iB) \dot{\xi}' + (C + iD) \cdot \widetilde{\xi}' + \widetilde{D}_g \right]$

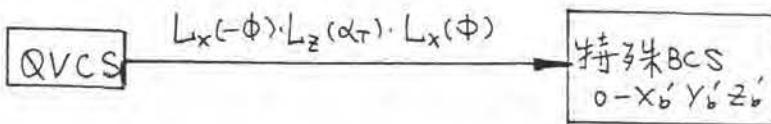
$$(\widetilde{\xi}')' = \frac{1}{V} \cdot (\dot{\xi}')$$

三、模型的修正方法

可以看得出来，上述弹丸运动 6 自由

度模型在式(2.12)、(2.13)处作了近似。当滚筒运动幅度过大时，模型的误差将会出现。这里介绍一下对此模型的修正。

由前述坐标系定义知，准弹性体坐标系 QBCS 与 QVCS 之间没有直接联系的角。这里定义一个特殊的弹性体坐标系 $O-X'_b Y'_b Z'_b$ ，以保证 X_0Y_V 面、全攻角面间的夹角与 $X'_b O Y'_b$ 面、全攻角面间的夹角保持相同，即中角。



记 $\Phi(\phi, \alpha_T, \phi) = L_x(-\phi) \cdot L_z(\alpha_T) \cdot L_x(\phi)$ [2.1]

$$\Phi(-\phi, \alpha_T, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_T & \sin \alpha_T & 0 \\ -\sin \alpha_T & \cos \alpha_T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha_T & \sin \alpha_T \cos \phi & -\sin \alpha_T \sin \phi \\ -\sin \alpha_T \cos \phi & \cos \alpha_T \cos^2 \phi + \sin^2 \phi & -\cos \alpha_T \sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi \\ \sin \alpha_T \sin \phi & -\cos \alpha_T \sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi & \cos \alpha_T \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \end{bmatrix}$$

从而 $\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \Phi(-\phi, \alpha_T, \phi) \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \\ \dot{\psi}_V \\ \dot{\theta}_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_T \sin \phi \\ \dot{\alpha}_T \cos \phi \end{bmatrix}$... (2.36)

将 $\Phi(-\phi, \alpha_T, \phi) = \sqrt{2} \text{ Taylor 展开} \sqrt{2}$ 有

$$\Phi(-\phi, \alpha_T, \phi) = \begin{bmatrix} -\alpha \left(1 - \frac{\alpha_T^2}{6} + \frac{\alpha_T^4}{120}\right) + \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) & -\beta \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \\ \beta \left(1 - \frac{\alpha_T^2}{6} + \frac{\alpha_T^4}{120}\right) & -\alpha \beta \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) + \beta^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \end{bmatrix} \quad \dots (2.38)$$

由 $\alpha = \alpha_T \cos \phi$, $\beta = \alpha_T \sin \phi$ 有

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_T \cos \phi - \dot{\phi} \cdot \dot{\alpha}_T \cdot \sin \phi, \quad \dot{\beta} = \dot{\alpha}_T \sin \phi + \dot{\phi} \cdot \dot{\alpha}_T \cos \phi \quad \dots (2.39)$$

所以 ω_y, ω_z 修正公式为：

$$\underline{\omega_y = \dot{\beta} + \dot{\psi}_v + \Delta y}, \quad \underline{\omega_z = \dot{\alpha} + \dot{\theta}_v + \Delta z} \quad \dots (2.40)$$

$$\text{其中, } [\Delta y = -\left(-\frac{\alpha_T^2}{6} + \frac{\alpha_T^4}{120}\right) \cdot \alpha \cdot \dot{\phi} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \cdot \alpha^2 \cdot \dot{\psi}_v - \alpha \beta \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \cdot \dot{\theta}_v]$$

$$[\Delta z = \left(-\frac{\alpha_T^2}{6} + \frac{\alpha_T^4}{120}\right) \cdot \beta \cdot \dot{\phi} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \cdot \beta^2 \cdot \dot{\theta}_v - \alpha \beta \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \dot{\psi}_v]$$

$$\text{其中 } \dot{\phi} \text{ 由 } \sin \phi = \beta / \alpha_T, \cos \phi = \alpha / \alpha_T \text{ 得到:} \quad \dots (2.41)$$

$$\dot{\phi} = (\dot{\beta} - \beta \dot{\alpha}_T / \alpha_T) / \alpha \quad \text{或} \quad \dot{\phi} = -(\dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}_T) / \beta \quad \dots (2.42)$$

而由 $\alpha_T^2 = \alpha^2 + \beta^2$ 有:

$$\dot{\alpha}_T = (\alpha \dot{\alpha} + \beta \dot{\beta}) / \alpha_T \quad \dots (2.43)$$

$\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ 由式(2.35)得到。

以上只是对角速度的投影关系作了修正，下面对力矩的投影作一修正。在 QVCS 中的侧向阻力矩及 Magnus 力矩为

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{QVCS} = \begin{bmatrix} b_1 \beta - b_2 \alpha \\ b_1 \alpha + b_2 \beta \end{bmatrix} \cdot I_y$$

投影到前述的特殊弹性体坐标系 SBCS 有：

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{SBCS} = \Phi_2(-\dot{\phi}, \alpha_T, \phi) \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{QVCS}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 & -\alpha \beta \\ -\alpha \beta & \beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_2 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cdot I_y$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \cdot \begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cdot b_2 \cdot \alpha_T^2 \cdot I_y \quad \dots (2.44)$$

忽略 $\Delta y, \Delta z$ 对时间的导数，则式(2.2)中的 \tilde{D}_g 应修正为 \tilde{D}_g^* ，

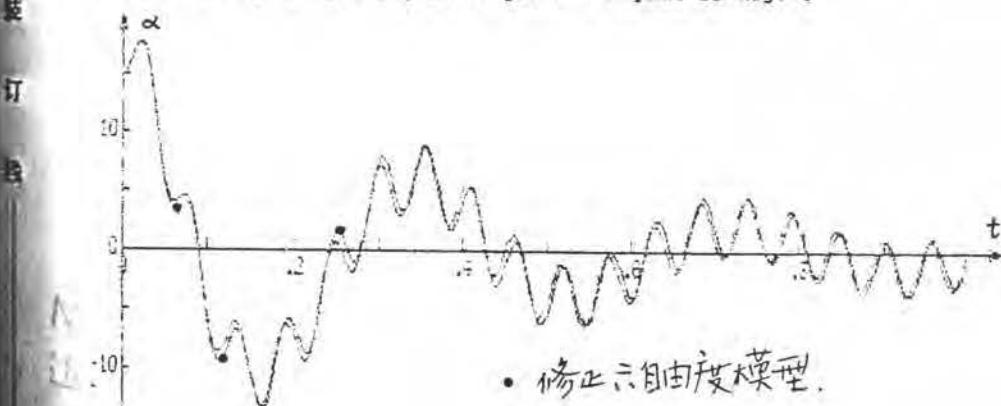
$$\begin{aligned} \tilde{D}_g^* = & (b_4 - i b_3) \cdot g \cos \theta_v / \sqrt{v} + (b_3 \cdot \Delta y - b_4 \cdot \Delta z) + i(b_3 \cdot \Delta z + b_4 \cdot \Delta y) \\ & + (i\beta - \alpha) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha_T^2}{24}\right) \cdot b_2 \cdot \alpha_T^2 \end{aligned} \quad \dots (2.45)$$

实际计算表明，式(2.20)其余部分不变。

仅将驱动项 \tilde{D}_g 修正成式(2.45)中的 \tilde{D}_g^* ，效果较好。注意到其它项如空气密度、 g_{wind}/v 以及各气动力系数对时间导数项的修正更高阶小量，本文对投影关系的修正已抓住了主要矛盾。

下面是本文六自由度模型(6D)与修正六自由度模型(6D_m)的对比。使用 SRC 155 mm. ERFB MK10. MOD2 弹，初始速度 $V_0 = 897 \text{ m/s}$, $\theta_{V_0} = 45^\circ$, 初始扰动 $\alpha_0 = 15^\circ$, 6D 与 6D_m 计算攻角运动过程对比见图 2.6

Fig.2.6 6D & 6D_m comparison plot. [Alpha0=15 deg.]



§2.3. 基于 Newton-Raphson 迭代的微分校正法

1. Newton-Raphson 迭代

考虑平方和函数极小问题

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^m f_i^2(\alpha), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \quad \text{--- (2.46)}$$

求 α^* 使 $F(\alpha^*) = \min_{\alpha} F(\alpha)$ 。设多元函数 $f(\alpha)$ 在 $\alpha^{(k)}$ 处连续且偏导，则 $f(\alpha)$ 在点 $\alpha^{(k)}$ 处展开

有：

$$f(\alpha) = f(\alpha^{(k)}) + (\alpha - \alpha^{(k)}) \cdot g^{(k)} + \frac{1}{2} (\alpha - \alpha^{(k)})^T \cdot G_k \cdot (\alpha - \alpha^{(k)}) \quad \dots (2.47)$$

其中， G_k 是由函数 $f(\alpha)$ 的二阶偏导数组成的

Hessian 矩阵：

$$G_k = \nabla^2 f(\alpha^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_n \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_n \partial \alpha_n} \end{bmatrix}_{\alpha=\alpha^{(k)}} \quad \dots (2.48)$$

$g^{(k)}$ 为 $f(\alpha)$ 的梯度向量：

$$g^{(k)} = \nabla f(\alpha^{(k)}) \quad \dots (2.49)$$

将式(2.47)取到二次项，则有：

$$\nabla y_k(\alpha) = G_k \cdot (\alpha - \alpha^{(k)}) + g^{(k)} \quad \dots (2.50)$$

$$y_k(\alpha) = \frac{1}{2} (\alpha - \alpha^{(k)})^T \cdot G_k \cdot (\alpha - \alpha^{(k)}) + (\alpha - \alpha^{(k)}) \cdot g^{(k)} + f(\alpha^{(k)})$$

设 $y_k(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha^{(m)}$ 处取极小值，则：

$$\nabla y_k(\alpha^{(m)}) = 0$$

$$\therefore G_k(\alpha^{(m)} - \alpha^{(k)}) + g^{(k)} = 0$$

$$\text{即有: } \alpha^{(m)} = \alpha^{(k)} - G_k^{-1} \cdot g^{(k)} \quad \dots (2.52)$$

Newton-Raphson 迭代法就是使用 $\alpha^{(m)}$ 作为下一个近似值

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - G_k^{-1} \cdot g^{(k)} \quad \dots (2.53)$$

这里的关键是要求二阶偏导矩阵。这对于没有解析解形式的 $f(\alpha)$ 是很困难的。我们能否不使用二阶偏导而只使用一阶偏导的信息来进行迭代呢？这就是下面所述的微分校正方法。

三、微分校正方法

由于靶板测得的数据是随距离变化的，

所以应采用 3.2.2 所述的 S-域 6-DOF 模型式 (2.34)。设

α_{ei}, β_{ei} ($i=1, \dots, N_e$) 为 N_e 个实测数据

α_{ci}, β_{ci} ($i=1, \dots, N_e$) 为相应的计算值。

取指标函数 J

$$J([C]) = \sum_{i=1}^{N_e} [(\alpha_{ei} - \alpha_{ci})^2 + (\beta_{ei} - \beta_{ci})^2] \cdot \nu_i / \sum_{j=1}^{N_p} \nu_j \quad \dots (2.54)$$

其中，

$[C] = (c_1, \dots, c_{N_p})^T$ 为 N_p 个优化参数

ν_i 为第 i 个数据的权系数。

使用微分校正方法的迭代计算公式为

$$[C]_{k+1} = [C]_k - [\Delta C]_k$$

其中， $[\Delta C]_k$ 为第 k 次迭代的优化增量，满足：

$$[A]_k \cdot [\Delta C]_k = [B]_k \quad \dots (2.55)$$

其中， $[A] = (a_{ij})$ ， $a_{ij} = \sum_{k=1}^{N_e} \left[\frac{\partial \alpha_{ck}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \alpha_{ek}}{\partial c_j} + \frac{\partial \beta_{ck}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \beta_{ek}}{\partial c_j} \right]$

$$[B] = (b_i) \quad b_i = \sum_{k=1}^{N_e} \left[(\alpha_{ck} - \alpha_{ek}) \cdot \frac{\partial \alpha_{ek}}{\partial c_i} + (\beta_{ck} - \beta_{ek}) \cdot \frac{\partial \beta_{ek}}{\partial c_i} \right]$$

$$(i=1, \dots, N_p, j=1, \dots, N_p) \quad \dots (2.56)$$

这里与 Newton-Raphson 迭代的区别是，有项

$$(\alpha_{ci} - \alpha_{ei}) \cdot \frac{\partial^2 \alpha_{ci}}{\partial c_i \partial c_j} \text{ 及 } (\beta_{ci} - \beta_{ei}) \cdot \frac{\partial^2 \beta_{ci}}{\partial c_i \partial c_j}$$

当 α_i 及 β_i 较小时，这么做是可行的，尤其是当接近最优点时，它与 N-R 迭代几乎是等价的，因为 α_i, β_i 是够小。

三、偏微分的计算

设要优化的参数为 $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ 以及它们

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

力系数为 $C_{L\alpha}$, $C_{L\alpha^3}$, $C_{m\alpha}$, $C_{m\alpha^3}$, $C_{y\alpha}$, $C_{mp\alpha}$, $C_{mg\alpha}$ 及 $C_{d\alpha}$
 $C_{d\alpha}$, 分别记为:

$$C_{I_1} = \alpha_0, \quad C_{I_2} = \beta_0, \quad C_{I_3} = \alpha'_0, \quad C_{I_4} = \beta'_0$$

$$C_1 = C_{L\alpha}, \quad C_2 = C_{L\alpha^3}, \quad C_3 = C_{m\alpha}, \quad C_4 = C_{m\alpha^3}$$

$$C_5 = C_{y\alpha}, \quad C_6 = C_{mp\alpha}, \quad C_7 = C_{mg\alpha}, \quad C_8 = C_{d\alpha}$$

$$C_9 = C_{d\alpha}$$

注意到 C_8, C_9 阻力系数仅与运动的影响很小
 故不可能由攻角运动提供的信息提取出来。
 若要作为优化参数, 它们的偏导公式同 G_i .

式(2.20)中, A, B, C, D 的公式为

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S l / I_y \right) \cdot C_{mg\alpha} \cdot (l/2V) + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S / mV \right) \cdot (C_{L\alpha} + C_{L\alpha^3} \cdot \alpha_T^2) \quad \checkmark \\ B = - \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S / mV \right) \cdot (p l / 2V) \cdot C_{y\alpha} + (I_x p / I_y) \quad \checkmark \\ C = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S l / I_y \right) \cdot (C_{m\alpha} + C_{m\alpha^3} \cdot \alpha_T^2) + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S / mV \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S l / I_y \right) \cdot \\ \quad (l/2V) \cdot C_{mg\alpha} \cdot (C_{L\alpha} + C_{L\alpha^3} \cdot \alpha_T^2) - \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S / mV \right) \cdot (p l / 2V) \cdot C_{mp\alpha} \cdot (I_x p / I_y) \quad \checkmark \\ D = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S l / I_y \right) \cdot (p l / 2V) \cdot C_{mp\alpha} + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S / mV \right) \cdot (p l / 2V) \cdot C_{mg\alpha} \cdot \\ \quad \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S l / I_y \right) \cdot (l/2V) \cdot C_{mp\alpha} + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S / mV \right) \cdot (I_x p / I_y) \cdot (C_{L\alpha} + C_{L\alpha^3} \cdot \alpha_T^2) \end{array} \right.$$

$$\text{令 } k_1 = pSV/2m, \quad k_3 = p l / 2V, \quad k_5 = g \cos \theta V / V \quad \dots (2.57)$$

$$k_2 = mVl / I_y, \quad k_4 = I_x p / I_y, \quad k_6 = l / 2V$$

则

$$D = b_2 + a_2 b_3 + a_4 b_4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -k_1 k_2 k_6 \cdot C_7 + k_1 (C_1 + C_2 \cdot \alpha_T^2) \quad \checkmark \\ B = -k_1 k_3 C_5 + k_4 \quad \checkmark \\ C = k_1 k_2 (C_3 + C_4 \alpha_T^2) + k_1^2 k_2 k_6 \cdot C_7 \cdot (C_1 + C_2 \alpha_T^2) - k_1 k_3 k_4 \cdot C_5 \quad \checkmark \\ D = k_1 k_2 k_3 C_6 + k_1^2 k_2 k_3 k_6 \cdot C_5 \cdot C_7 + k_1 k_4 \cdot (C_1 + C_2 \cdot \alpha_T^2) \quad \checkmark \\ \tilde{D}_g = k_4 - k_1 k_2 k_6 k_5 \cdot C_7 \end{array} \right. \quad \times \quad \dots (2.58)$$

对式(2.20)两边求偏导, 并忽略 $k_1 \sim k_6$ 及 C_i 的
 偏导, 则有

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial c_i} (\tilde{\xi})' = \frac{1}{V} [- (A - iB) \cdot \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} + (C + iD) \cdot \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} + \frac{\partial D_g}{\partial c_i}] + \\ \frac{1}{V} \left[\frac{\partial (C + iD)}{\partial c_i} \cdot \tilde{\xi} - \frac{\partial (A - iB)}{\partial c_i} \cdot \tilde{\xi} \right] \\ \frac{\partial}{\partial c_i} (\tilde{\xi})' = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} \right) \end{array} \right] \quad -- (2.59)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{即} \quad \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} \right)' = \frac{1}{V} [- (A - iB) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} \right) + (C + iD) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} \right) + \frac{\partial D_g}{\partial c_i}] + \\ \frac{1}{V} \left[\frac{\partial (C + iD)}{\partial c_i} \cdot \tilde{\xi} - \frac{\partial (A - iB)}{\partial c_i} \cdot \tilde{\xi} \right] \\ \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} \right)' = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i} \right) \end{array} \right] \quad -- (2.60)$$

由弹道积分已知 A, B, C, D 及 $\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}, V$ 等，
所以积分 (2.60) 式可得到式 (2.56) 中所需要的 $\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial c_i}$ 。
对气动系数 C_i 的各偏导方程初值均为 0。
积分式 (2.60)，主要的是求取 A, B, C, D 对 C_i 的
偏导。下面是 A, B, C, D 对各气动系数的偏
导公式：

(1). C_{Ld} :
$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial c_1} = k_1 + k_2 c_1 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_1}, \\ \frac{\partial B}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial c_1} = (k_1^2 k_2 k_6 \cdot c_7 \cdot c_2 + k_1 k_2 \cdot c_4) \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_1} + k_1^2 k_2 k_6 \cdot c_7 \\ \frac{\partial D}{\partial c_1} = k_1 k_4 + k_1 k_4 c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_1} \end{array} \right] \quad -- (2.61)$$

(2). C_{Ld^3} :
$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial c_2} = k_1 \cdot \alpha_T^2 + k_1 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_2} \\ \frac{\partial B}{\partial c_2} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial c_2} = k_1 k_4 \cdot c_4 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_2} + k_1^2 k_2 \cdot k_6 \cdot c_7 (\alpha_T^2 + c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_2}) \\ \frac{\partial D}{\partial c_2} = k_1 k_4 \cdot \alpha_T^2 + k_1 k_4 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_2} \end{array} \right] \quad -- (2.62)$$

(3). $C_m d$:
$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial c_3} = k_1 c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_3} \\ \frac{\partial B}{\partial c_3} = 0 \end{array} \right]$$

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial c_3} = k_1 k_2 (1 + c_4 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_3}) + k_1^2 k_2 k_6 \underbrace{k_7 \cdot c_2}_{C_7 C_2} \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_3} \\ \frac{\partial D}{\partial c_3} = k_1 k_4 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_3} \end{cases} \quad \text{---(2.64)}$$

(4). C_{md3} :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial c_4} = k_1 c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_4} \\ \frac{\partial B}{\partial c_4} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial c_4} = k_1 k_2 (\alpha_T^2 + c_4 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_4}) + k_1^2 k_2 k_6 \cdot c_2 \cdot c_7 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_4} \\ \frac{\partial D}{\partial c_4} = k_1 k_4 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_4} \end{cases} \quad \text{---(2.65)} \checkmark$$

(5). C_{ypk} :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial c_5} = k_1 c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_5} \\ \frac{\partial B}{\partial c_5} = -k_1 k_3 \\ \frac{\partial C}{\partial c_5} = k_1 k_2 c_4 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_5} + k_1^2 k_2 k_6 \cdot c_7 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_5} - k_1 k_3 k_4 \\ \frac{\partial D}{\partial c_5} = k_1^2 k_2 k_3 k_6 \cdot c_7 + k_1 k_4 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_5} \end{cases} \quad \text{---(2.66)} \checkmark$$

装
订
线

(6). C_{mpk} :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial c_6} = k_1 c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_6} \\ \frac{\partial B}{\partial c_6} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial c_6} = k_1 k_2 c_4 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_6} + k_1^2 k_2 k_6 \cdot c_7 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_6} \\ \frac{\partial D}{\partial c_6} = k_1 k_2 k_3 + k_1 k_4 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_6} \end{cases} \quad \text{---(2.67)} \checkmark$$

(7). C_{mg2} :

$$\frac{\partial \widetilde{D}_g}{\partial c_7} = -i \cdot k_1 k_2 k_5 k_6 \quad \text{---(2.68)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial c_7} = -k_1 k_2 k_6 + k_1 c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_7} \\ \frac{\partial B}{\partial c_7} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial c_7} = k_1 k_2 c_4 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_7} + k_1^2 k_2 k_6 [c_7 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_7} + (c_1 + c_2) \cdot \alpha_T^2] \\ \frac{\partial D}{\partial c_7} = k_1^2 k_2 k_3 k_6 \cdot \cancel{c_5} + k_1 k_4 \cdot c_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_7} \end{cases} \quad \text{---(2.69)} \checkmark$$

其中,

$$\underline{c_5^* = c_5 + C_y \delta_2 \cdot \delta / k_3}$$

$$\underline{\frac{\partial \widetilde{D}_g}{\partial c_j} = 0 \quad (j=1, \dots, 6)}$$

$$\underline{\frac{\partial \alpha_T^2}{\partial c_j} = 2 \cdot (\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial c_j} + \beta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial c_j})}, \quad j=1, \dots, 7 \quad \text{---(2.70)}$$

关于初始扰动初值 $\alpha_0, \beta_0, \dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$, 同样

以得到 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_i}$ ($i=1, \dots, 4$) 的值，但应注意积分

(2.60) 式的初值应为：

$$\begin{cases} (\partial \alpha / \partial \alpha_0)' = 0, & (\partial \alpha / \partial \alpha_0) = 1, & (\partial \beta / \partial \alpha_0)' = 0, & (\partial \beta / \partial \alpha_0) = 0 \\ (\partial \alpha / \partial \beta_0)' = 0, & (\partial \alpha / \partial \beta_0) = 0, & (\partial \beta / \partial \beta_0)' = 0, & (\partial \beta / \partial \beta_0) = 1 \\ (\partial \alpha / \partial \dot{\alpha}_0)' = 1, & (\partial \alpha / \partial \dot{\alpha}_0) = 0, & (\partial \beta / \partial \dot{\alpha}_0)' = 0, & (\partial \beta / \partial \dot{\alpha}_0) = 0 \\ (\partial \alpha / \partial \dot{\beta}_0)' = 0, & (\partial \alpha / \partial \dot{\beta}_0) = 0, & (\partial \beta / \partial \dot{\beta}_0)' = 1, & (\partial \beta / \partial \dot{\beta}_0) = 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

且 A, B, C, D 对 C_I 的偏导公式都同为：

$$\begin{cases} \partial A / \partial c_{Ii} = K_1 c_2 \cdot \partial \dot{x}^2 / \partial c_{Ii} \\ \partial B / \partial c_{Ii} = 0 \\ \partial C / \partial c_{Ii} = (K_1 K_2 \cdot c_4 + K_1^2 K_2 K_6 \cdot c_7 \cdot c_2) \cdot \partial \dot{x}^2 / \partial c_{Ii} \\ \partial D / \partial c_{Ii} = K_1 K_4 \cdot c_2 \cdot \partial \dot{x}^2 / \partial c_{Ii} \end{cases} \quad (2.72)$$

这样，连同 6 个固接弹簧方程多了，若有 N_p 个参数参与寻优，整个积分状态方程总数目为：

$$N_{eq} = 11 + 4 * N_p \quad (2.73)$$

即每增加一个优化参数就要多积分 4 个一阶微分方程。

四、关于初始转速的修正

SRC-YC [2.8] 中，将陀螺力矩 P 列为优化参数，由式(2.5)知， P 由该角运动快慢频率之和决定。NYC 程序中也将 P 列为优化参数，但实际数据处理中， P 是否作为优化参数，由用户自己决定。

由式(2.57)知， K_3, K_4 与转速 n 有关，关于 n 的偏导公式仍同(2.60)式，但 A, B, C, D 对 n 的偏导公式为：

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial p_0} &= K_1 C_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial p_0}, \\ \frac{\partial B}{\partial p_0} &= -K_1 \cdot \left(\frac{l}{2V}\right) \cdot C_5 \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0} + \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0}, \\ \frac{\partial C}{\partial p_0} &= K_1 K_2 C_4 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial p_0} + K_1^2 K_2 \cdot K_6 C_7 C_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial p_0} - \\ &\quad 2 K_1 K_3 \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot C_5 \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0}, \\ \frac{\partial D}{\partial p_0} &= K_1 K_2 \cdot \left(\frac{l}{2V}\right) \cdot C_6 \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0} + K_1^2 K_2 K_6 \cdot C_5 \cdot C_7 \cdot \left(\frac{l}{2V}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0} + \\ &\quad K_1 \cdot \left(I_x/I_y\right) \cdot (C_1 + C_2 \alpha_T^2) \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0} + K_1 K_4 \cdot C_2 \cdot \frac{\partial \alpha_T^2}{\partial p_0} \quad \dots (2.74)\end{aligned}$$

其中, $\frac{\partial \alpha_T^2}{\partial p_0} = \alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial p_0} + \beta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial p_0}$, $\frac{\partial \beta}{\partial p_0}$ 由式

(2.34) 中转速 α 式两边对 p_0 偏导得到:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial p}{\partial p_0}\right]' &= \left(\frac{1}{V}\right) \cdot \left(\frac{l}{2V}\right) \cdot C_{ep} \cdot \left(\frac{1}{2} p_0^2 + \frac{l}{I_x}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0}, \\ \left.\left(\frac{\partial p}{\partial p_0}\right)\right|_0 &= 1 \quad \dots (2.75)\end{aligned}$$

且 $\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial p_0} = 0$, $\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial p_0} = 0$, 注意:

$$\frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial p_0} = \left(\frac{I_x}{I_y}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial p_0} \quad \dots (2.76)$$

所以当 p_0 为优化参数时, 总的微分方程数为: $N_{eq} = 11 + 4 * N_p + 1$. \checkmark $\quad \dots (2.73)$

事实上, 这样将 p_0 作为优化参数就等于是将多维寻优参数增加了一维。维数增加了, 使得搜寻的范围集扩张了。可以说, 将 p_0 不作为优化参数所得到的寻优结果是 p_0 作为优化参数结果的子集, 后者的拟合误差应比前者要小。

五. 收敛保护环节 —— 梯度法寻优.

由上所述, 使用一次偏导的信息来进行迭代计算, 即“微分校正”方法。但若希望从式(2.20)求出二次偏导从而使用“二次法”, 即 Newton-Raphson 迭代方法, 理论上是可行的,

然而此时微分方程数就变得非常之多(包含偏导数又项), 以致于实际上是不可能的。本文使用微分校正法, 大大减少了计算量, 这对处理一般实际工程问题, 常常是有效的。然而, 即使是NR 迭代, 对初位的要求也是严格的。所以, 在这样的数据处理实际问题中, 必须加入收敛保护环节。它的作用是使得从给定初值能搜索进到收敛域内, 然后使用微分校正法, 能较快地收敛至最优解, 即当使用微分校正时由于优化增量太大学原因造成误差均方值增大时, 能通过减步长等办法以保证收敛。

由于我们已知 $\nabla J/\Delta C$, 即梯度 ∇J 的信息, 一旦均方根误差 $(RMS)_{K+1} > (RMS)_K$ 那么式 $C_{K+1} = C_K - \Delta C_K$ 中的 ΔC_K 应取为:

$$\Delta C_K^* = h \cdot \|\Delta C_K\| \cdot \nabla J_K / \|\nabla J_K\| \quad \dots (2.74)$$

其中, h 为小于 1 的正数, 通常取为 0.5。实际上, 式(2.74)说明了当 RMS 发散时, 参考微分校正的优化增量 ΔC_K 的大小, 沿着一次梯度的方向 $\nabla J_K / \|\nabla J_K\|$ 将 $\|\Delta C_K\|$ 缩小 h 倍作为步长向前搜索一步。如果搜索发现 RMS 仍然发散, 则再次将上一次的步长缩小 h^2 倍仍沿梯度方向搜索, 直至 RMS 下降为止。这是能保证做好的。然后继续使用微分校正方法, 这样就可以保证较好的迭代收敛。

3.2.4. 程序 NYC 及两组真实打靶数据处理

一. 程序 NYC

基于上述模型及方法，完成了靶板数据处理的非线性模型软件 NYC，以 FORTRAN-77 写成。

程序中包括打靶已知条件输入及打靶结果输入模块、大气模块、重力模型模块^[2,10]、已知气动力系数的多项式输入与插值模块、积分模块、解线性方程组子程序以及右端数模块、数据处理主模块。其中，积分采用 Adams 法只调 2 次右端函数，比 R-K-4 积分节省机时。右端函数模块中有弹道计数模块及偏导计算模块，由于采用了复数运算，使得程序可读性与可维护性加强。大气模块可包含真实大气输入。

NYC 最大的特点，是可以任意指定某几个气动力系数为要求参与寻优的而另外的设为已知。由于采用了二次对应的办法，使得系数的顺序不限。在右端函数中，方程 1~11 为自由度弹道用，12~24 为扰动初值的偏导方程。从 25 开始的偏导方程顺序可任意安排。若若参与优化，其偏导方程放在最后 5 个。

NYC 还可以产生给定打靶条件下的仿真实验数据。由 NYC 是对距离 s 积分，所产生的仿真实验数据可以直接再为 NYC 处理。这便于程序的调试及理论探讨。当然 NYC

也可以作为六自由度弹道计算程序，可以研究初始扰动对弹道的影响。

二、使用 NYC 应注意的几个问题。

(1). NYC 中可以作为优化参数的有炮口扰动初值 $\alpha_0, \beta_0, \dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ ，尤尔气动力系数 C_{md}, C_{md} , $C_{mgd}, C_{ld}, C_{mx^3}, C_{ax^3}, C_{px}, C_{d0}, C_{dx}$ 以及初始转速 η_0 ，其中， η_0 是否作为优化参数由用户决定，扰动初值总是参与优化的。假设滚转阻尼 C_{rp} 及无控小舵效应已知。

(2). NYC 精度及其控制出口有三种，一是整体 RMS 精度控制；二是相邻两次迭代 RMS 之差控制精度以及总的最多迭代次数限制控制，满足这三者之一，NYC 就停止迭代。

(3). 虽然 NYC 采用了如此复杂的模型及算法，但就其本质而言，仍是一个多变量极值搜索问题。虽然，任何寻优方法，都不能保证其收敛点就是全局最优的。如图 2.7，从点①、② 两处出发搜索的极小值可能为美工点 II，显然它们只是当地极值点。在 NYC 数据处理中，完全可能遇到这样的当地极值问题。如果极值点得到的气动力系数与一般数量概念有背，则应重新给定初值点进行拟合计算。或者，这是由于将那些对指标函数贡献相差太大的优化参数组合进行寻优造成的“病态”，应考虑单独或分开进行拟合，修正计算。

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

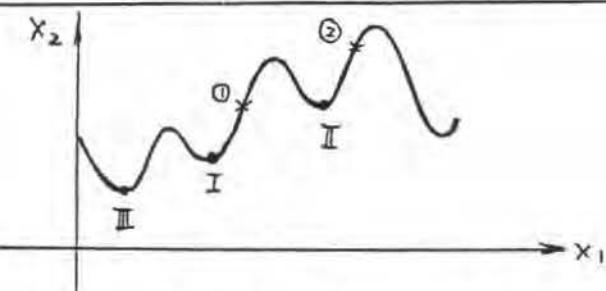


图 2.7，当地极值问题。

三、两组真实打靶数据处理。

这里由于还没有搜集到国内打靶的数据，故仅使用SRC公司六十年代在CARDE计划中所进行的两次打靶数据进行处理[2.8][2.9]，两次打靶序号为T1154和T1157，使用SRC 155mm. ERFB MK10 MOD2 加农炮弹。

①. 打靶初始条件：

Test conditions table : (155 mm. ERFB MK10 MOD2)

Test	Mass (lbm.)	Ixx (Kg.m^2)	Iyy (Kg.m^2)	V0 m./s.	TW cal./turn	S0 (ft.)	S (ft.)
T1157	100.4	.1463	2.021	372.4	25	197	25
T1154	104.5	.1452	1.9869	377.8	25	197	25

下表为SRC 155mm. ERFB 炮的标准气动力值(仅用这两次打靶的速度插值得到)

SRC 155mm. ERFB MK10 MOD2 standard aerodynamics (1983年)

V0 (m./s.)	Cd0	Cda	Cla	Cla3	Cma	Cma3	Cmpa	Cmqa	Cypa	Clp
372.4	.284	4.117	1.995	10.915	3.537	0.	2.29	-43	-2.5	-0.072
377.8	.287	4.179	2.004	11.041	3.528	0.	2.29	-43	-2.5	-0.072

(2) 数据处理结果

SRC T1154, T1157 数据处理迭代过程见下表。
p₀ 都作为优化变量。未参与优化的参数。

SRC T1154 test data reduction. (p₀ as optimization parameter)

STEP=0.9525(M.)	$\alpha_0=0^\circ$	$\dot{\alpha}_0=0$ (RAD./S.)							
p ₀ =612.6 (RAD./S.)	$\beta_0=2^\circ$	$\dot{\beta}_0=0.5$ (RAD./S.)							
Cma0=3.6	Cmpa0=.7	Cmqa0=-14							
<hr/>									
Iter:	RMS	Cma	Cmpa	Cmqa	p ₀	$\dot{\alpha}_0$	$\ddot{\alpha}_0$	β_0	$\dot{\beta}_0$
(deg.)					(radian/second)			(degree.)	
1	2.5778	13.4248	-.1626	-2.4755	1595.04	-.85	1.71	-1.582	-.726
2	1.8179	13.4005	.1323	-13.14	1595.23	-1.035	1.948	-2.279	-1.294
3	1.2568	13.4337	.2750	-16.774	1597.11	-1.080	1.895	-2.166	-1.364
4	1.1976	13.4375	.2030	-14.727	1597.36	-1.042	1.884	-2.149	-1.264
4	1.1942	13.4370	.2023	-14.716	1597.34	-1.036	1.883	-2.145	-1.249
5	1.1941	13.4371	.2045	-14.774	1597.34	-1.036	1.883	-2.145	-1.248
6	1.1941	13.4371	.2044	-14.769	1597.34	-1.036	1.883	-2.145	-1.248
7	1.1941	13.4371	.2044	-14.767	1597.34	-1.036	1.883	-2.145	-1.248

SRC T1157 test data reduction. (p₀ as optimization parameter)

STEP=0.9525(M.)	$\alpha_0=0^\circ$	$\dot{\alpha}_0=-.5$ (RAD./S.)							
p ₀ =603.83 (RAD./S.)	$\beta_0=2^\circ$	$\dot{\beta}_0=-.5$ (RAD./S.)							
Cma0=3.5	Cmpa0=2	Cmqa0=-30							
<hr/>									
Iter:	RMS	Cma	Cmpa	Cmqa	p ₀	$\dot{\alpha}_0$	$\ddot{\alpha}_0$	β_0	$\dot{\beta}_0$
Iteration(deg.)					(radian/second)			(degree.)	
1	15.3149	13.7659	.5177	-31.3011619.3211	-.384	1-.781	1-.626	12.016	
2	13.4201	13.4592	1.0396	-28.4501595.6101	-.663	1-.978	1.750	11.776	
3	1.9219	13.4669	1.1251	-31.4481595.4831	-.811	1-.862	1.334	11.348	
4	1.8817	13.4651	1.1302	-31.2551595.4001	-.823	1-.830	1.263	11.296	
5	1.8767	13.4666	1.1329	-31.3851595.4451	-.825	1-.826	1.252	11.287	
6	1.8766	13.4665	1.1315	-31.3301595.4481	-.824	1-.826	1.252	11.290	
7	1.8766	13.4666	1.1316	-31.3351595.4491	-.824	1-.826	1.252	11.290	

取标准 ERFB 弹的气动力。

使 SRC-YC 程序也可以对这两组真实打靶数据进行处理，由于其模型设转速不变，速度转速比为常值，得到 H, M, P, T 后作一些转换可以得到 C_{ma} , C_{mpa} , C_{mqa} ，这里设 C_L C_d 已知，见式(2.6)。应注意，(2.6)中 V_1 , ρ 应代入平均值。关于炮口初始扰动，SRC-YC 仅给出了 K_{10} , K_{20} , ϕ_{10} , ϕ_{20} ，所以

$$i\dot{\alpha}_0 + \beta_0 = \tilde{\xi}_0 = K_{10} e^{i\phi_{10}} + K_{20} e^{i\phi_{20}}$$

$$i\dot{\alpha}_0 + \beta_0 = \tilde{\xi}_0 = K_{10} e^{i\phi_{10}} (\lambda_1 + i\omega_1) + K_{20} e^{i\phi_{20}} (\lambda_2 + i\omega_2)$$

下表为 NYC 与 SRC-YC 的结果对比。

	T1154		T1157	
	NYC	SRC-YC	NYC	SRC-YC
α_0 (deg.)	-2.145	-1.935	.250	.836
β_0 (deg.)	-1.248	-1.95	1.29	2.872
$\dot{\alpha}_0$ (rad./s.)	-1.036	-1.58	-1.824	-1.242
$\dot{\beta}_0$ (rad./s.)	1.683	1.37	-1.826	-1.29
\dot{p}_0 (rad./s.)	1597.226	597.23	1595.4486	1595.68
C_{ma}	3.4371	3.4375	3.4666	3.566
C_{mpa}	0.2044	0.107	1.1316	1.177
C_{mqa}	-14.767	-11.7	-31.335	-30.4
IRMS (deg.)	1.1941	1.27	0.8756	0.885

可见 NYC 处理结果要比 SRC-YC 精确。

图 2.8~图 2.11 为这两组数据处理结果的拟合曲线。

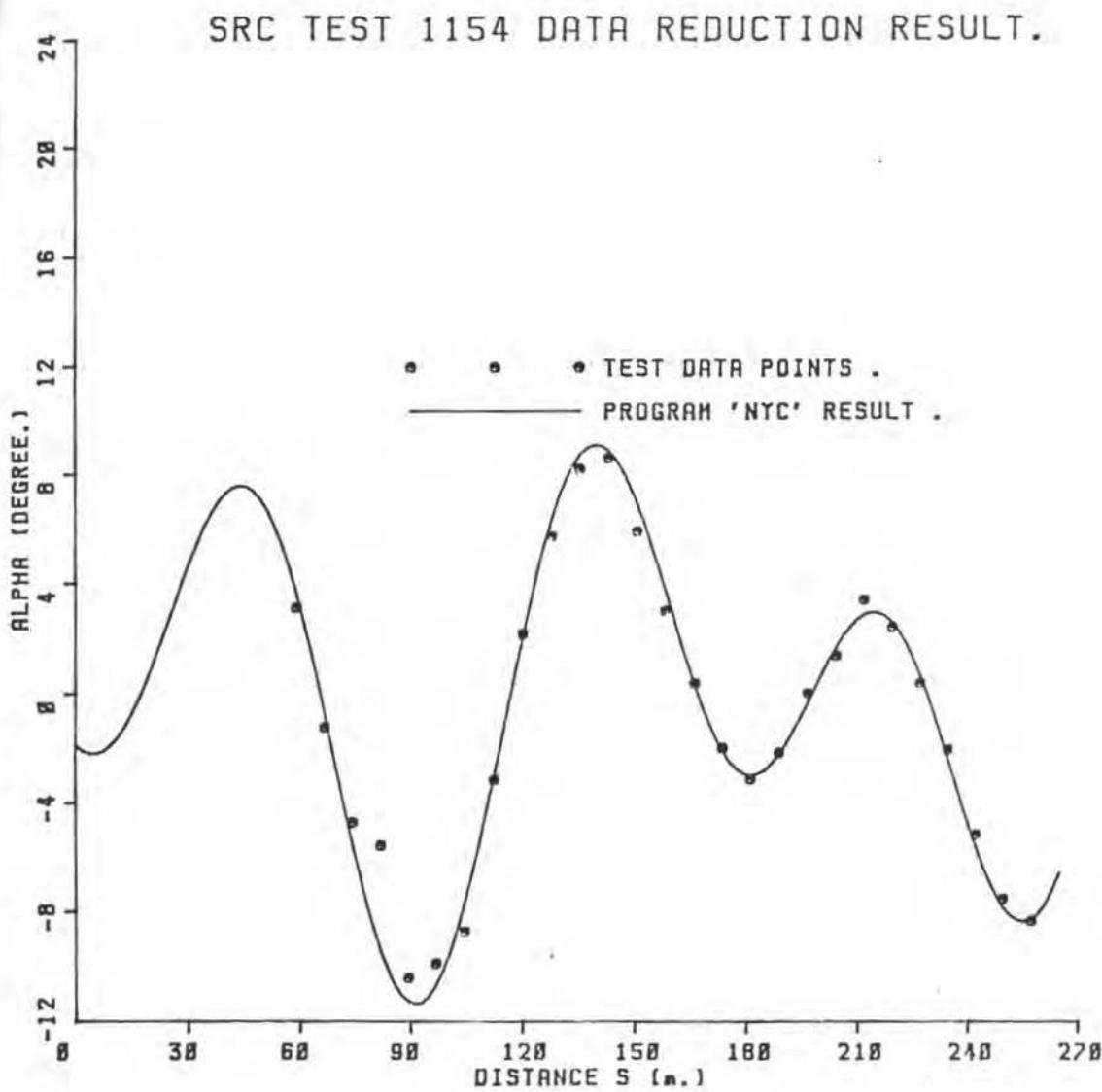
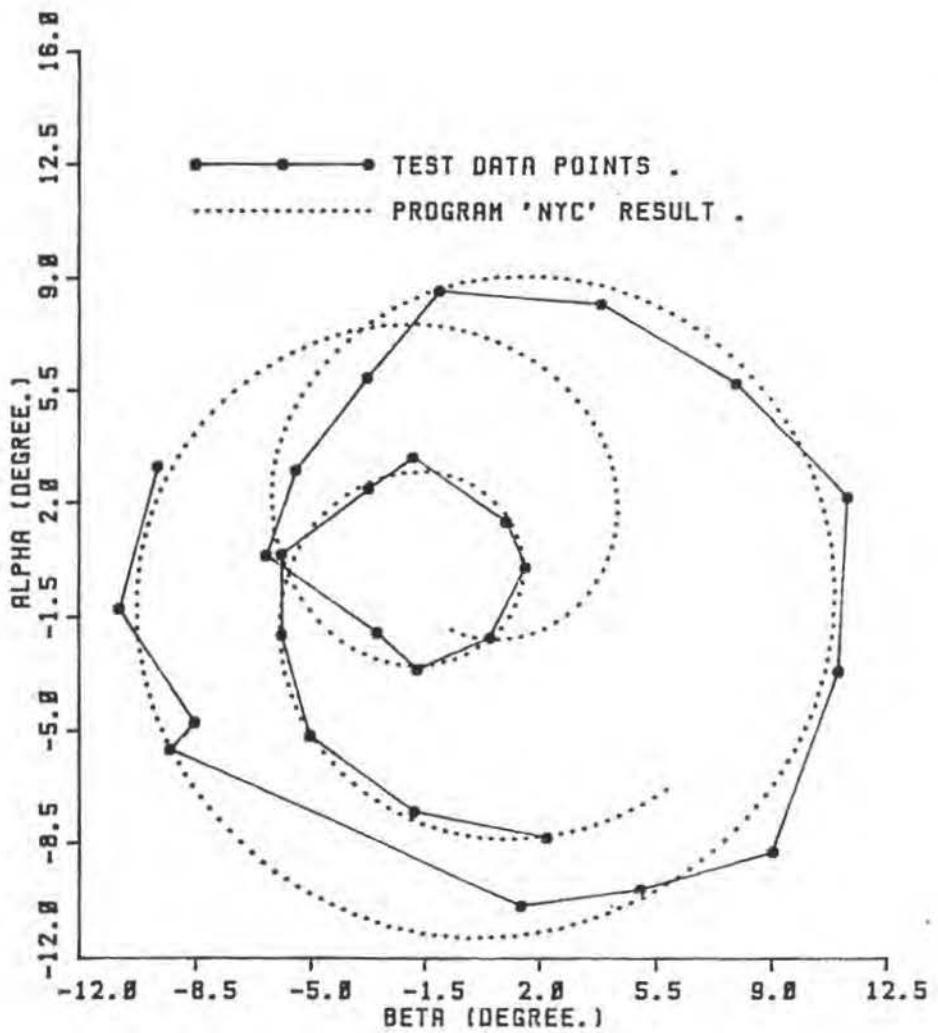


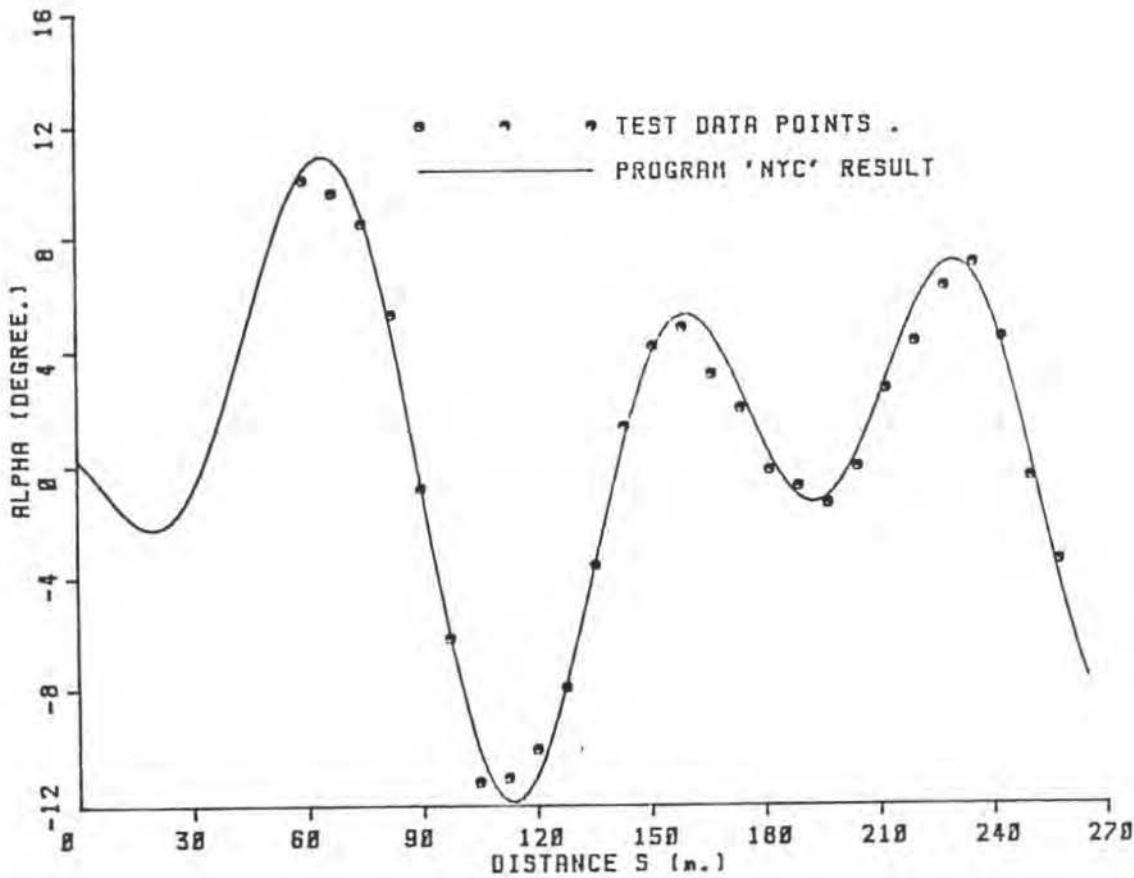
图 2.8

SRC TEST 1154 DATA REDUCTION RESULT.

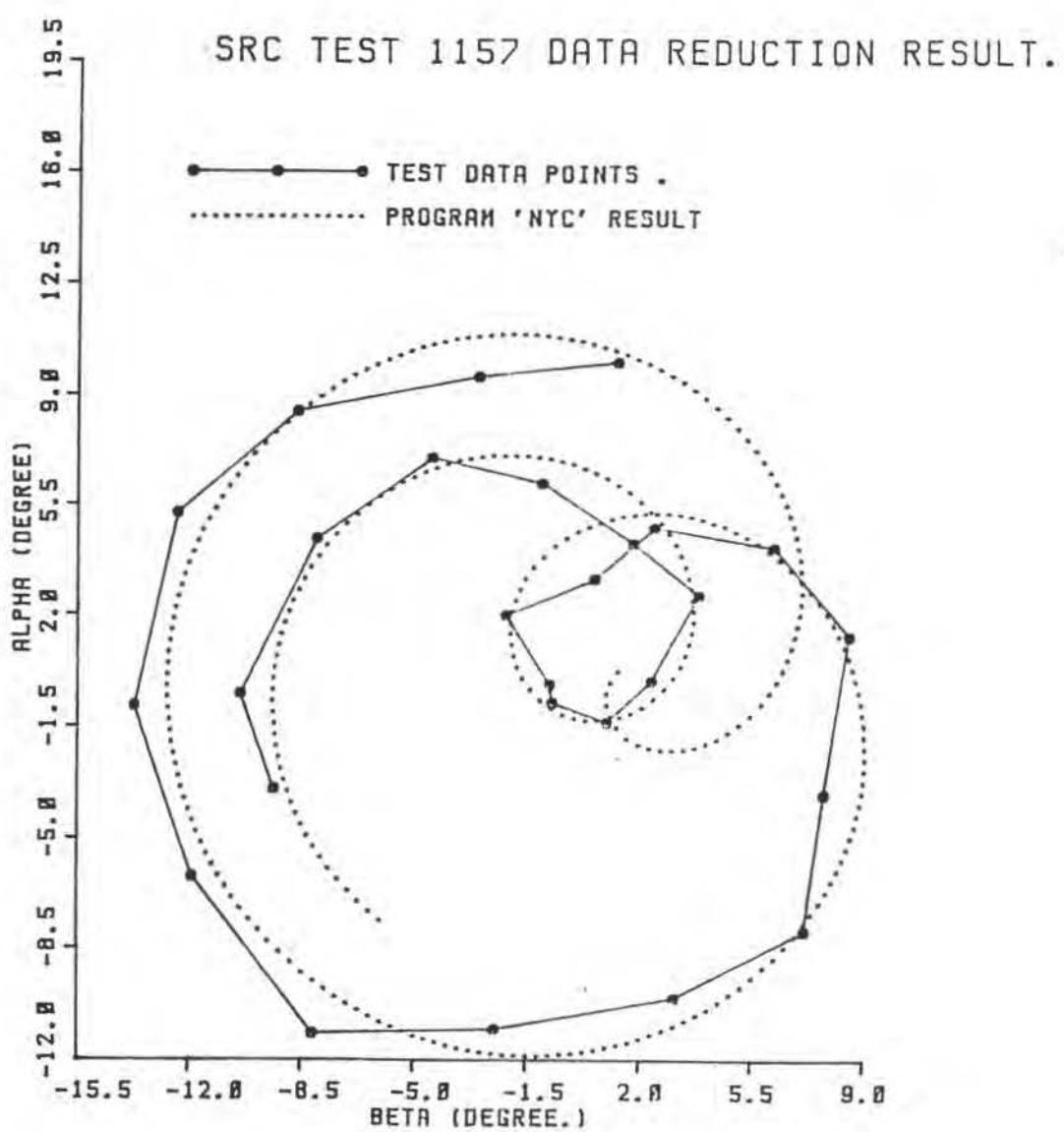


$| \frac{d}{dx} | = 2.9$

SRC TEST 1157 DATA REDUCTION RESULT.



|图 2.10



[图] 2.11

§2.5 气动力系数敏感性分析与非线性系数的讨论。

一、气动系数的敏感性系数。

从上面的讨论中可知，靶板数据处理本质上是一个多变量参数寻优问题。但是这与一般的参数寻优不同，因为实际上各个系数(参数)的数量概念以及其对角运动的影响概念是已知的。得到拟合结果，如何评价这些参数拟合结果的可信性呢？一般地，如果参数对初始角运动的影响大，则从实测数据中拟合出的系数结果的可靠性就大。

由于知道 ΔJ 的性质，那么参数的变化 ΔC 使得目标函数 J 的变化实际上就反映了系数拟合结果是否“有意义”，即它对角运动的贡献是否较大。为判别这种参数的变化对 J 的影响，即敏感性，定义下面的气动系数的敏感性系数 η_i ：

$$\eta_i = \frac{\Delta J_i \cdot C_i \cdot 1\%}{(RMS)^2} \quad \cdots (2.75)$$

其中，RMS 是最后一次收敛的均方根误差。

ΔJ_i 为梯度 ΔJ 向量的第 i 个分量。

C_i 为第 i 个优化参数或气动系数的参考数值。

$\%$ 为每个优化参数相对变化百分比。

那么， η_i 实际上就是 C_i 变动 1% 时目标函数 J 变化的百分比。NYC 中给出 $(\Delta J_i \cdot \%) / (RMS)^2$ 。

那么， $|c_i|$ 的大小就说明了优化参数 c_i 提出出来的相对可信性。

二、二组真实打靶数据的气动系数敏感性

以 T1157 数据为例，从 5.2.4 的处理结果知，这组打靶数据的扰动较小。对 T1157 数据进行多种气动系数的组合计算，可以得到下面的气动系数敏感性系数表。 c_i 中的 c_i 参考值取 c_i 的拟合结果值。 C_{m3} 参考值取 5。

装

订
线

由此可見，在小扰动数据里，最有可能提取出来的气动力系数为 C_{m2} , C_{mpa} , C_{mgd} 及 C_{Lx} , C_{Lz} , C_{m4} ，常 ϵ 不能可靠地提取得到。至于 Magnus 力系数 C_{p2} ，从物理意义上来讲，它对攻角运动的影响很小，所以不能希望提取得到 C_{p2} 。

初速 v_0 的敏感性系数是最大的，达 0.38。这是因为转速 ω 有关，而 ω 是反映了攻角运动慢快频率之和的。（见式（2.5））通常攻角运动频率是可以拟合好的，而衰减因子则不易拟合好，除非有足够的周期。这也是为什么 v_0 与 C_{m2} 的敏感性系数较大的原因，参见式（2.5），式（2.6）。

三、大攻角扰动仿真实验数据的气动系数敏

感性。

仍以 T1157 试验条件，但此时使用 NYC 来产生仿真实验数据， $\alpha_0=15^\circ, \beta_0=0^\circ, \dot{\alpha}_0=0^\circ, \dot{\beta}_0=0^\circ$ 。此时实验数据就含有较大的非线性。(试验条件同 T1157，使用 SRC 155mm. ERFB 标准气动力。)

通过大量的计算以及不同的参数组合寻优，如 $C_{m\alpha}, C_{m\alpha^2}, C_{m\alpha^3}, C_{mp\alpha}, C_{mp\alpha^2}$ 一组， $C_{mp\alpha}, C_{mp\alpha^2}, C_{yp\alpha}$ 一组， $C_{d\alpha}, C_{d\alpha^2}, C_{d\alpha^3}$ 一组等进行寻优计算，我们可以得到下面的敏感性系数表，参考值取该同前。

装

订

稿

同样，由上表知， $C_{m\alpha}$ 一般能很好地提取到，即 $C_{m\alpha}$ 的拟合结果比较可行、准确。 $C_{mp\alpha}, C_{mp\alpha^2}, C_{d\alpha}$ 不能提取出来，但它们在物理概念上对角运动的贡献要比 $C_{m\alpha}$ 小，反映在敏感性系数上，它们的敏感性系数比 $C_{m\alpha}$ 时小近一个数量级。 $C_{d\alpha}, C_{d\alpha^2}, C_{yp\alpha}$ 对攻角运动的影响很小，一般不参与寻优，尽管 NYC 中有相应的安排。

立方俯仰力矩系数 $C_{m\alpha^3}$ ，显然当攻角运动较大时，此力矩系数的作用要比升力系数的作用要大，即对攻角运动的影响要大。只要实验数据中包含了大攻角运动的非线性信息，则 $C_{m\alpha^3}$ 就可以提取得到。虽然在这里的仿真实验数据中， $C_{d\alpha^3}$ 是起了作用的，但从敏感性系数来看，它还是比 $C_{m\alpha^3}$ 的要小。

综所上述，通常 $C_{m\alpha}$, $C_{mp\alpha}$, $C_{m\beta\gamma}$, C_L 是可以提取和修正的。一般先设定 C_L 已知，将 $C_{m\alpha}$, $C_{mp\alpha}$, $C_{m\beta\gamma}$ 三个系数作为一组进行寻优，然后用设 $C_{m\alpha}$, $C_{mp\alpha}$, $C_{m\beta\gamma}$ 已知单独拟合 C_L 来对它进行修正。如果将其它对目标函数不敏感的系数或参数与上述敏感性系数较大的系数或参数列为一组进行拟合的话，常易造成计算的“病态”，如收敛到一个显然不正常的本地极值点等。

四 非线性气动系数的讨论

在生成上述仿真试验数据时， $C_{m\alpha^3}=0$, $C_L \neq 0$ 对于能否辨识出 $C_{L\alpha^3}$ 及 $C_{m\alpha^3}$ ，这要看它们实际上对角运动的影响是否较大。这里为证实非线性气动系数只是在大改角运动试验数据才可能拟合出来，这里将上述仿真试验数据产生时的 α 变为 5° ，其余不变，作相同计算，没到

$$\eta_{C_{L\alpha}} = 0.007, \quad \eta_{C_{L\alpha^3}} = 0.0001$$

所以，非线性气动系数的提取，与改角运动的非线性程度有关。在一般的小角扰动情况下， $C_{L\alpha^3}$, $C_{m\alpha^3}$ 是不能可靠地“辨识”出来的。

为证实 $C_{m\alpha^3}$ 要比 $C_{L\alpha^3}$ 提取的可信性要大，以及 $C_{m\alpha^3}$ 在大角运动数据处理中能提取得到，这里重新使用 NYC 制造了一组仿真实验数据，打靶条件仍同 TII57, $\alpha_0=15^\circ$, $\dot{\alpha}_0=\dot{\beta}_0=\dot{\rho}_0=0$ ，此时置 $C_{m\alpha^3}=5$ 。

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

首先将 $C_{m\alpha}$, $C_{mg\alpha}$, $C_{mp\alpha}$ 作为一组进行优化，
得到下表的收敛过程以及敏感性系数。β
设为精确已知，不列为优化参数。

Large angular motion test data reduction. (Same condition as Tilt)

STEP=0.9525(M.)	$\alpha_0=14$	$\dot{\alpha}_0=0$ (RAD./S.)						
$p_0=754.793$ (rad./s.)	$\beta_0=0$	$\dot{\beta}_0=-0.1$ (RAD./S.)						
$C_{ma0}=3.4$	$C_{mpa0}=2$	$C_{mg\alpha 0}=-40$						
Iter - 1 RMS : Iteration (deg.)	C_{ma}	C_{mpa}	$C_{mg\alpha}$	α_0 : (degree.)	β_0 : (rad./sec.)	$\dot{\alpha}_0$	$\dot{\beta}_0$	
1	16.1471	3.4044	12.0359	-41.0037	14.024	-0.060	-0.032	1.004
2	16.0065	3.4091	12.0730	-42.0324	14.050	-0.120	-0.064	1.007
3	15.8568	3.5063	12.8163	-62.4582	14.593	-1.000	-0.709	1.080
4	12.8680	3.5072	12.6294	-50.2376	15.178	1.055	-0.203	1.024
5	12.5753	3.5445	12.2018	-38.5592	15.069	11.245	1.434	-0.080
6	1.4661	3.5296	12.2962	-43.1629	14.972	-1.162	-0.058	-0.011
7	1.4441	3.5403	12.3282	-44.4194	15.005	-1.178	-0.075	1.009
8	1.1602	3.5373	12.2763	-42.5427	15.004	1.097	1.032	1.000
9	1.1005	3.5363	12.2838	-42.7767	14.998	1.020	1.011	1.007
10	1.0560	3.5373	12.2947	-43.1777	14.999	-0.029	-0.011	1.001
11	1.0165	3.5373	12.2904	-43.0136	15.000	1.004	1.001	1.001

$$(\gamma_{C_{m\alpha}} = 0.74, \gamma_{C_{mp\alpha}} = 0.013, \gamma_{C_{mg\alpha}} = 0.031)$$

将此拟合结果代入设为已知，将 $C_{m\alpha 3}$, $C_{L\alpha 3}$ 设为拟合参数进行迭代计算，得到下面的收敛过程表。可以看出， $C_{m\alpha 3}$, $C_{L\alpha 3}$ 的收敛过程中出现了切换一次梯度寻优的现象，这是由于 $C_{m\alpha 3}$ 与 $C_{L\alpha 3}$ 两者的敏感性系数相差太大造成的。 $\gamma_{C_{m\alpha 3}} = 0.19$, $\gamma_{C_{L\alpha 3}} = 0.0081$ ，这就说明了大角运动时， $C_{m\alpha 3}$ 是可以提取出来的，相反， $C_{L\alpha 3}$ 仍然比较难以辨识出来。

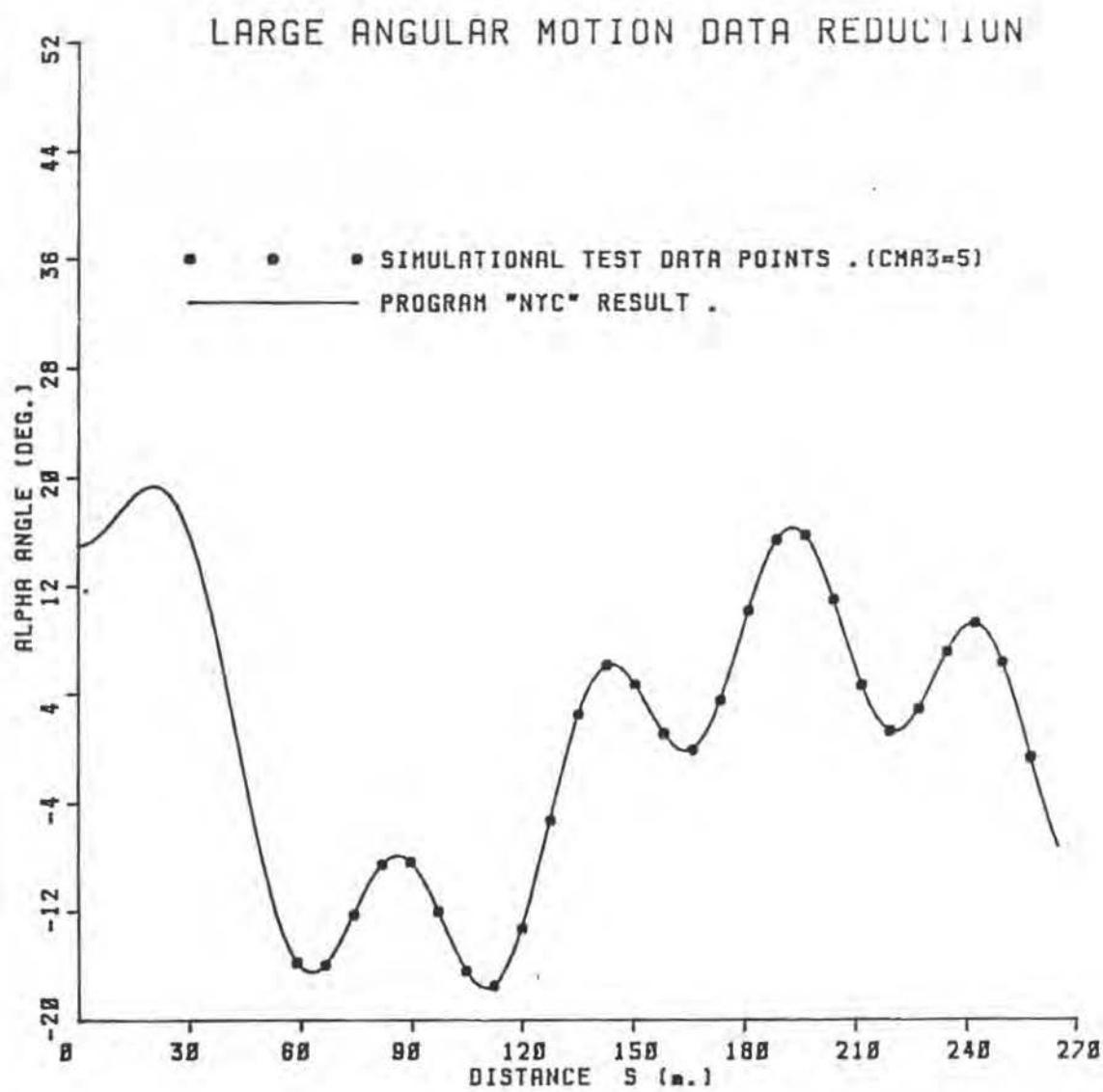
从上面的迭代可以看出，由于所用数据不含测量噪声，所设优化参数总能收敛至真值，且 RMS 可以很小，然而，对所得拟合结果的信任，应该参考其敏感性系数

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

的大小。通常即使在大角扰动数据中, C_{L23} 也不能较好地辨识出来, 如果此角运动数据的非线性较强, 则 C_{m23} 是可以辨识出来的。上述置 $C_{m23}=5$ 时的仿真试验数据拟合结果见图2。

Large angular motion test data reduction.

STEP=0.9525(M.)		$\alpha_0=14$	$\dot{\alpha}_0=0$ (RAD./S.)	$\beta_0=0$	$\dot{\beta}_0=0$ (RAD./S.)		
$(C_{Ma3})_0 = 4$		$(C_{La3})_0 = 10$					
Iter:	RMS	C_{La3}	C_{Ma3}	α_0	β_0	$\dot{\alpha}_0$	$\dot{\beta}_0$
11	15.5472	133.2953	15.2973	115.856	-3.362	-1.231	-1.11
12	11.9979	142.2160	15.3192	114.901	-.483	-.210	1.062
13	13.1876	142.2159	15.3153	115.594	1.147	-.210	1.060
13 (1)	13.9098	142.2160	15.3192	112.702	1-.221	-.210	1.061
13 (2)	14.5835	138.3534	15.2561	115.408	1-2.657	-1.150	1-.467
13 (3)	12.8759	12.0732	14.9713	114.882	1.470	1.160	1.160
14	11.4318	110.9757	15.0344	115.160	11.671	1.608	1-.047
15	1.4470	110.5652	14.9539	114.980	1.327	1.120	1-.032
16	1.5625	110.5652	14.9539	115.076	1.311	1.120	1-.032
16 (1)	1.2192	111.0451	15.0066	115.004	1-.062	1-.022	1-.028
17	1.1647	111.0482	15.0179	115.004	1-.112	1-.041	1-.007
18	1.0687	110.8572	15.0031	115.003	1.028	1.009	1.006
19	1.0684	110.8780	14.9952	115.001	1.053	1.019	1.002
110	1.0180	110.9257	14.9981	114.998	1-.002	1.000	1-.002



15.2.12

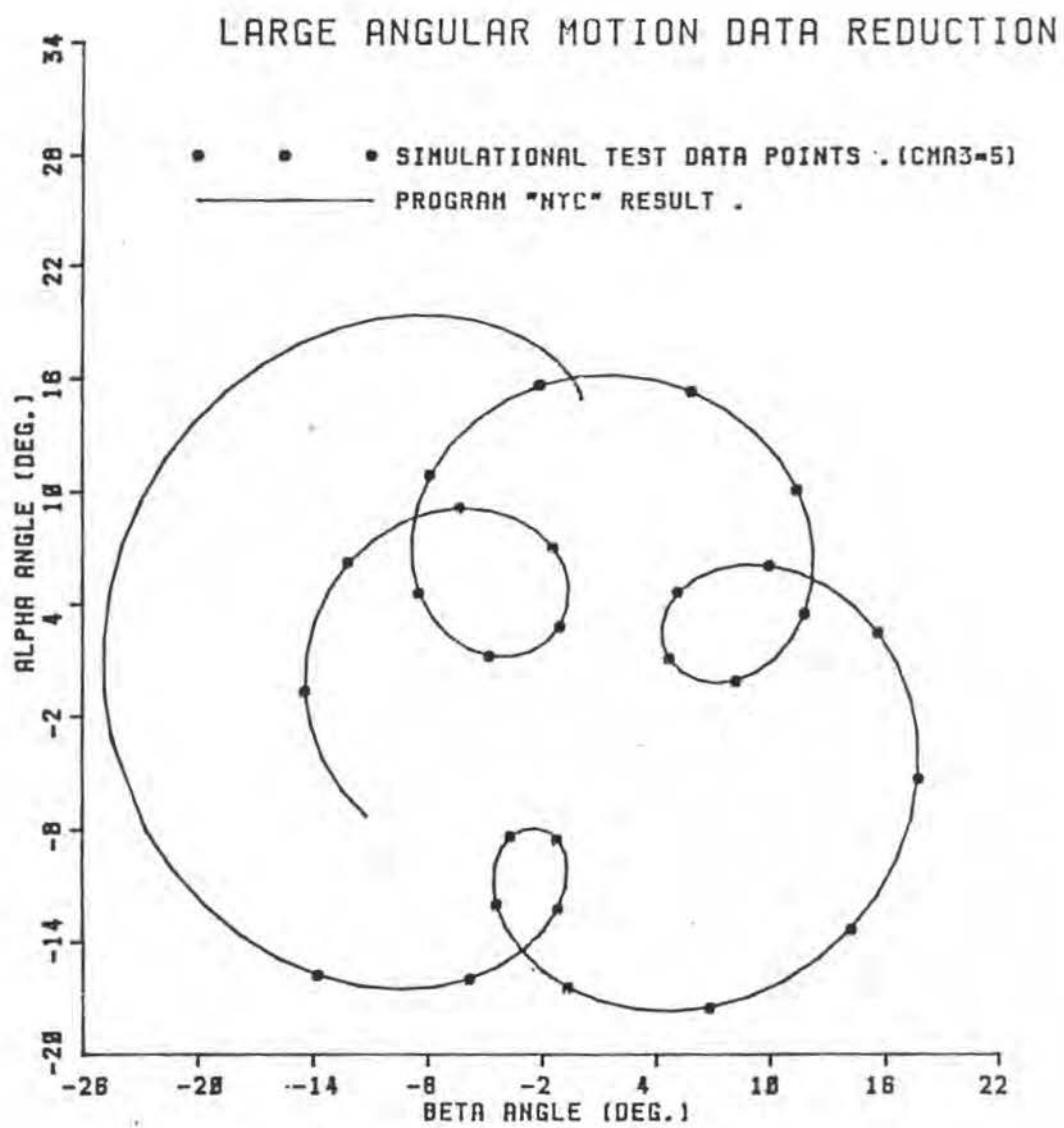


图 2.13

§2.6. 结论及改进意见

使用上面介绍的非线性模型进行靶板数据处理，可以灵活地设定某些运动系数已知而对其它运动系数进行拟合或修正。^[2.5]声明不可能从全攻角衰减过程的信息中同时提取 C_{mgx} 及 C_{mpx} ，而在靶板试验中，由于已知复攻角的过渡过程，从上述分析与计算可以说， C_{mpx} 、 C_{mgx} 是可以同时拟合出来的。由式(2.5)、式(2.6)， C_{mpx} 、 C_{mgx} 与角运动的衰减因子以及角运动的频率有关，所以为提高 C_{mpx} 、 C_{mgx} 的拟合精度，靶板试验最好要能满足 3 个以上周期的角运动过程。

根据运动系数的敏感性分析， C_{nx} 能很好提取到， C_{mpx} 、 C_{mgx} 、 C_{dx} 也能辨识出来。一般地， C_{px} 不能辨识， C_{do} 、 C_{ax} 不作拟合参数。非线性运动系数 C_{Lx3} 、 C_{mx3} 的提取效果取决于它们实际上对角运动的影响，在小攻角扰动运动情况下， C_{Lx3} 、 C_{mx3} 不能被辨识出来。当试验数据中非线性程度较大时， C_{mx3} 有希望辨识出来，从上述分析知， C_{Lx3} 一般较难提取。

从此非线性模型拟合得到的初始扰动值，是与炮口的真实初始扰动值相逼近的，这对于了解炮口扰动因素等是有意义的，由 SRC-YC 得到的炮口初始扰动值是较近似的，与 NYC 结果相差较大。

使用 NYC，同样可以得到稳定性因子 S_d 、 S_g

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

以及参数 H, M, P, T ，但它们是随距离变化的。取其平均值可作为参考了解值。

总之，本部分介绍的方法，直接从气动力系数出发作为拟合参数，使用带一次梯度法保护的微分校正方法，收敛性很好，而且拟合参数的组合非常灵活，所以，可以通过不同的组合，从而充分利用靶板试验所提供的信息。靶板试验设备简单、投资小，本文的方法，有很好的实用价值。当然如果已知更多的信息，如全部弹道的状态过程数据，那么使用类似的方法，可以得到更多、更准确的信息。

装

订

线

第三部分 (Part 3)

火炮弹道仿真研究

(Projectile Simulation Study)

第一章 炮弹弹道仿真模型研究

1.1. 概述

我们知道，影响外弹道计算准确性的主要原因是对攻角运动过程计算不准确。当然，可以使用精确的刚体动力学六自由度模型来得到攻角的准确变化过程从而得到射程、射偏的精确值。但是，6自由度模型中角运动的所谓快频(快臂)与慢频(慢臂)运动耦合在一起，所以数值积分的步长必须很小才行，这就限制了六自由度模型的应用，一般它很少应用于全弹道计算而仅用于研究初始扰动效应。但刚体6自由度是不可缺少的，它是一了参照标准，可以用来评价或校核其它弹道模型的计算结果，关键的问题在于，要使这些计算结果之间具有可比性。

为节省计算时间，只有去除了角运动计算中的快频因素才可能加大积分步长。SRC的LOB、LOBS程序[3.3][3.4]，采用了4自由度模型，攻角使用动力平衡角来代替，这实际上 是角运动的稳态解。这个模型已被NATO采用为制表生成的弹道计算模型[3.5]。但是，通过大量的计算表明，在大射角情况下，4自由度模型(4-DOF)在射程与射偏的计算结果上与6-DOF相差很大。这是由于这种情况下 的较大攻角运动不能被4-DOF模型所描述而造成的“系统误差”或“模型误差”。

Dr. C.H. Murphy 在 [3.12] 中试图通过某些修斜来改善 4-DOF 的结果，但改向的计算仍然是基于改向运动方程的稳态解。在计算机发达的今日，我们完全可以使用一个较好的方法，能在 4DOF 与 6DOF 模型之间作一个折衷——这就是五自由度 (5-DOF) 方法，从而大大改善了弹道计算结果，又大大减少了计算机时间。

5-DOF 模型方法的实质，是将弹的运动看作一简化线性定常系统，然将此系统离虚轴较远的特征根舍去，仅留下其离虚轴较近的主导特征根，并由此特征根重构一简化系统来代替原系统 [3.8]。因为，通过大量的计算表明，上述大射向情况下名义弹道计算中，只反映出改向的慢频运动，所以这里可以大胆地舍去快频的因素，仅由慢频因素来描述改向运动，这样，弹道积分的步长可以大大增加，实际计算表明，这里所作的模型简化抓住了主要矛盾，弹道计算结果 (射程、射偏) 以及改向运动都与 6-DOF 符合得很好。

本章主要系统地介绍基于刚体动力学的 6-DOF 模型以及弹丸运动的五自由度、四自由度模型，并对模型之间的切换问题进行了讨论。弹丸运动的六自由度模型及其修正方法见第二部分 §2.2。

为简单起见，记

刚体 6D：基于刚体动力学模型的六自由度
弹道仿真模型。

6D：弹丸运动的六自由度模型。

6D_m：修正 6D 模型。

类似地记作 5D, 5D_m 及 4D

§1.2 刚体六自由度弹道计算模型 [3.7]

一、坐标系定义及几何关系。

这里仍然采用坐标系的转向关系图来
定义所涉及的坐标系。共有 7 个坐标系：

TAWCS：全攻角空速坐标系，

TABCS：全攻角弹体坐标系，

BCS：弹体坐标系，

QBCS：准弹体坐标系，

QWCS：准空速坐标系，

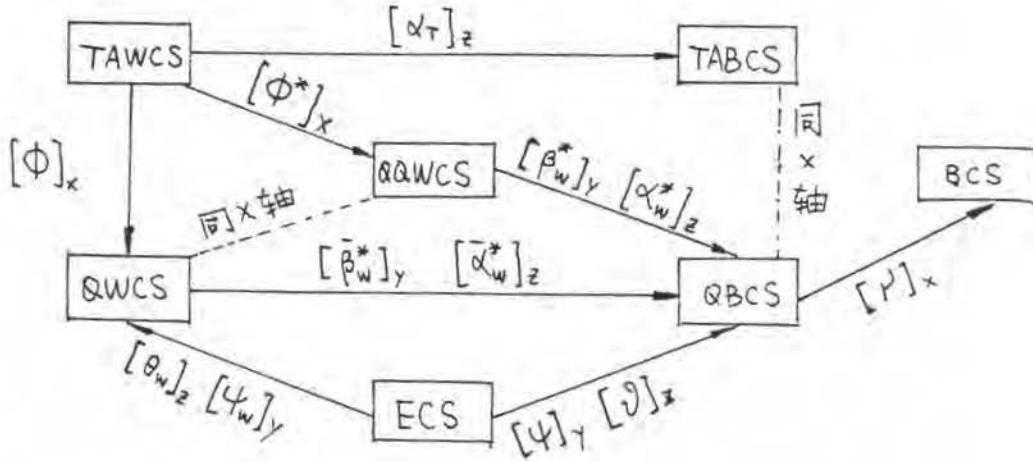
QQWCS：准准空速坐标系，

ECS：地面坐标系。

其中，BCS, QBCS, QWCS, ECS 的详细描述可在
[3.1], [3.2] 中找到。各坐标系之间的转向关系
图见图 3.1。

本文所有的几何关系的推导以及变换
矩阵的求取都借助一个自行开发的坐标系
转动变换矩阵生成程序 ROTAXIS。它通过输入转
动角及所绕轴的名称(角的正负号代表正反
转)，自动生成变换矩阵公式。当通过两个
不同的路径转动后，可取两个转动矩阵分

量相等的部分组成几何关系方程公式输出，非常实用方便，准确无误。



装
订
线

图 3.1 坐标系角度关系图

其中， $\vartheta, \psi, \theta_w, \psi_w$ 为独立的角，其余的角均可由这 4 个角通过几何关系方程得到。几何关系方程有：

$$\begin{cases} \beta_w^* = \sin^{-1}(\cos \theta_w \cdot \sin(\vartheta - \psi_w)) \\ \alpha_w^* = \vartheta - \sin^{-1}(\sin \theta_w / \cos \beta_w^*) \end{cases} \quad -(3.1)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_r = \cos \alpha_w \cdot \cos \beta_w^* \\ \alpha_r = \sin^{-1}((\sin^2 \alpha_w^* + \sin^2 \beta_w^* - \sin^2 \alpha_w \cdot \sin^2 \beta_w)^{1/2}) \\ \sin \phi^* = \cos \alpha_w \cdot \sin \beta_w^* / \sin \alpha_r \\ \cos \phi^* = \sin \alpha_w^* / \sin \alpha_r \end{cases} \quad -(3.2)$$

参见图 2.4, 图 2.5, 为了与 6D 对比方便，这里给出中角的公式。首先求取 QWCS 与 QBCS 之间的议角 $\bar{\alpha}_w^*, \bar{\beta}_w^*$ ，仍由几何关系方程有：

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_w^* = \sin^{-1}[\sin \vartheta \cdot \cos \theta_w - \cos \vartheta \cdot \sin \theta_w \cdot \cos(\vartheta - \psi_w)] \\ \bar{\beta}_w^* = \sin^{-1}(\cos \vartheta \cdot \sin(\vartheta - \psi_w) / \cos \bar{\alpha}_w^*) \end{cases} \quad -(3.3)$$

同样，

$$\begin{cases} \cos\alpha_T = \cos\bar{\alpha}_w^* \cdot \cos\bar{\beta}_w^* \\ \sin\phi = \cos\bar{\alpha}_w^* \cdot \sin\bar{\beta}_w^* / \sin\alpha_T \\ \cos\phi = \sin\bar{\alpha}_w^* / \sin\alpha_T \end{cases} \quad \cdots (3.4)$$

所以, $\alpha = \alpha_T \cdot \cos\phi$, $\beta = \alpha_T \cdot \sin\phi$ $\cdots (3.5)$

这样得到的 α , β 的定义与第二部分 §2.2 中所定义的完全一致, 这样就可以方便地用刚体 6D 去校核其它弹道模型。应注意, α 与 α^* 是不同的。

二、六自由度弹道方程

(1) 弹道方程推导

弹的质心运动学及动力学方程, 在 ECS 中, 我们有:

$$\begin{cases} \frac{d u_{xe}}{dt} = \sum_i F_{xei} / m \\ \frac{d u_{ye}}{dt} = \sum_i F_{yei} / m \\ \frac{d u_{ze}}{dt} = \sum_i F_{zei} / m \end{cases} \quad \cdots (3.6)$$

$$[\frac{dx_e}{dt}, \frac{dy_e}{dt}, \frac{dz_e}{dt}]^T = (u_{xe}, u_{ye}, u_{ze})^T \quad \cdots (3.7)$$

其中, $\vec{u} = (u_{xe}, u_{ye}, u_{ze})^T$ 为弹质心运动速度在 ECS 中投影。

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ 为弹相对于风的速度在 ECS 中的投影。

令 $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$ 为风速在 ECS 中的投影, 则有

$$\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$$

式(3.1)中的 θ_w , ψ_w 定义为:

$$\begin{cases} \psi_w = -\operatorname{tg}^{-1}(v_z/v_x) \\ \theta_w = \operatorname{tg}^{-1}(v_y / (\sqrt{v_x^2 + v_z^2}))^{1/2} \end{cases} \quad \cdots (3.8)$$

ϑ , ψ , χ 为弹体俯仰, 偏航, 滚转位置角。

对于绕质心运动，定义 $\vec{\omega}$ 为弹体角速度矢量， $\vec{\omega}_Q$ 为QBCS 的角速度矢量，在QBCS 中表示为

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T, \quad \vec{\omega}_Q = (\omega_x - \dot{\varphi}, \omega_y, \omega_z)^T \quad \dots (3.9)$$

而弹的角动量矢量 \vec{H} 为

$$\vec{H} = (I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z)^T \quad \dots (3.10)$$

一般地， $I_y = I_z$ ，在ECS 中，角运动动力学方程为：

$$(d\vec{H}/dt)_{ECS} = \sum \vec{M} \quad \dots (3.11)$$

而在QBCS 中则表示为：

$$d\vec{H}/dt + \vec{\omega}_Q \times \vec{H} = \sum \vec{M} \quad \dots (3.12)$$

所以上式左边为

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega}_Q \times \vec{H} = \begin{bmatrix} I_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} \\ I_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} \\ I_y \cdot \frac{d\omega_z}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_z \\ \omega_z & 0 & -(\omega_x - \dot{\varphi}) \\ -\omega_y & \omega_x - \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_y \omega_z \end{bmatrix}$$

即 $d\omega_x/dt = \sum M_x / I_x$

$$d\omega_y/dt = [\sum M_y - I_x \omega_x \omega_z + I_y \cdot (\omega_x - \dot{\varphi}) \cdot \omega_z] / I_y$$

$$d\omega_z/dt = [\sum M_z + I_x \omega_x \omega_y - I_y \cdot (\omega_x - \dot{\varphi}) \cdot \omega_y] / I_y \quad \dots (3.13)$$

为得到弹体的三个位置角 $\psi, \vartheta, \dot{\varphi}$ ，下面推导 $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ 与 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 之间的转换关系。因为

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = L_z(\vartheta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

所以，绕质心运动的运动学方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} = \omega_x - \tan \vartheta \cdot \omega_y \\ \dot{\vartheta} = \omega_y / \cos \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = \omega_z \end{bmatrix} \quad \dots (3.14)$$

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

所以从式(3.6), (3.7), (3.13), (3.14) 我们共有 12 个一阶微分方程。这就是基于刚体动力学的六自由度弹道方程。当弹有底排或火箭喷推时，还有第 13 个修正方程，是关于弹的质量变化的：

$$\frac{dm}{dt} = -m_c \quad \text{-- (3.15)}$$

其中， m_c 为秒流量。

(2). 作用于弹上的气动力及气动力矩及投影。

空气动力在 TAWCS 中定义：

$$\vec{F}_a = \begin{bmatrix} -Q \cdot S \cdot [C_{d0} + C_{d\alpha} \cdot \alpha_T^2] \\ Q \cdot S \cdot [C_{L\alpha} \cdot \alpha_T + C_{L\alpha^3} \cdot \alpha_T^3] \\ Q \cdot S \cdot C_{p\alpha} \cdot (\rho l / 2V) \cdot \alpha_T \end{bmatrix} \quad \text{-- (3.16)}$$

其中， Q 为动压头， $Q = \frac{1}{2} \rho V^2$ ； α_T ：全攻角。

空气动力矩部分定义在 TAWCS 中，部分仍定义在 QBGS 中。在 QBGS 中有：

$$\vec{M}_{a1} = \begin{bmatrix} Q \cdot S \cdot l \cdot C_{L0} \cdot \delta + Q \cdot S \cdot l \cdot C_{p0} \cdot (\rho l / V) \\ Q \cdot S \cdot l \cdot C_{mgd} \cdot (\omega_y \cdot l / 2V) \\ Q \cdot S \cdot l \cdot C_{mgl} \cdot (\omega_z \cdot l / 2V) \end{bmatrix} \quad \text{-- (3.17)}$$

而在 TAWCS 中空动力矩为

$$\vec{M}_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q \cdot S \cdot l \cdot C_{p\alpha} \cdot (\rho l / 2V) \cdot \alpha_T \\ Q \cdot S \cdot l \cdot (C_{mgd} \cdot \alpha_T + C_{mgl} \cdot \alpha_T^3) \end{bmatrix} \quad \text{-- (3.18)}$$

将 \vec{F}_a 投影到 ECS。将 \vec{M}_{a1} , \vec{M}_{a2} 投影至 QBGS 得到式(3.12)中的 \vec{M} 。式(3.6)中还应包括地球引力，离心力及 Coriolis 力，以及火箭助推力，这些与第一部分相同 [3.3]。如果有底部排气，则

式(3.16)中应加上因底排所减少的阻力 C_{dB} , 具体 C_{dB} 的模型及公式是 [3.11]

<3> 动不平衡因素的加入 [3.2]

由于动不平衡通常较小, 我们可以先假设动不平衡在 BCS 中引起的角动量增量为 $\Delta \vec{H}$, 令 $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ 为 BCS 中机体转动角速度的投影, 则

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}_x \\ \bar{\omega}_y \\ \bar{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \bar{\omega}_x \\ I_y \bar{\omega}_y \\ I_z \bar{\omega}_z \end{bmatrix} + \Delta \vec{H} \quad \text{--- (3.19)}$$

仅考虑 $I_{xy}, I_{xz}, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ 的 $-P\parallel$ 小量, 忽略 $\bar{\omega}_x$ 小量, 则有:

$$\Delta \vec{H} = [\phi, -I_{xy} \bar{\omega}_x, -I_{xz} \bar{\omega}_x]^T \quad \text{--- (3.20)}$$

相应的惯性力矩为

$$\Delta \vec{M} = -\vec{\omega} \times \Delta \vec{H} = - \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_z & \bar{\omega}_y \\ \bar{\omega}_z & 0 & -\bar{\omega}_x \\ -\bar{\omega}_y & \bar{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ -I_{xy} \bar{\omega}_x \\ -I_{xz} \bar{\omega}_x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi \\ I_{xz} \cdot \bar{\omega}_x^2 \\ I_{xy} \cdot \bar{\omega}_x^2 \end{bmatrix} \quad \text{--- (3.21)}$$

将 $\Delta \vec{M}$ 由 BCS 投影至 QBCS 中, 又 $\bar{\omega}_x = \omega_x$,

$$(\Delta \vec{M})_{QBCS} = \begin{bmatrix} \phi \\ -(I_{xz} \cdot \cos \varphi + I_{xy} \cdot \sin \varphi) \cdot \omega_x^2 \\ -(I_{xz} \cdot \sin \varphi - I_{xy} \cdot \cos \varphi) \cdot \omega_x^2 \end{bmatrix} \quad \text{--- (3.22)}$$

将式(3.22)加入式(3.13)即可计算得到动不平衡的效应。

<4> 初始扰动的变换关系

在第二部分介绍的 6D 及 6D_m 模型中,

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

可以输入 $\alpha_0, \beta_0, \dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ 来研究它初始扰动过程。这里刚体 6-D 也应输入这种定义的 α_0, β_0 初始角扰动。原先的刚体 6D 的初始角扰动只是输入 $\psi_0, \vartheta_{w0}, \vartheta_0, \theta_{w0}$ ，这里为方便地使用刚体 6D 来进行校核，给出 $\psi_0, \vartheta_{w0}, \vartheta_0, \theta_{w0}$ 与 $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ 之间的换算公式。关于初始扰动角速度扰动不需要变换。

已知 α_0, β_0 ，先求出 $\bar{\alpha}_{w0}^*$ 及 $\bar{\beta}_{w0}^*$ ：

$$\alpha_{T0} = (\alpha_0^2 + \beta_0^2)^{1/2}, \sin \Phi_0 = \beta_0 / \alpha_{T0}, \cos \Phi_0 = \alpha_0 / \alpha_{T0}$$

由 (3.4) 式，

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{w0}^* &= \sin^{-1}(\alpha_0 \cdot \sin \alpha_{T0} / \alpha_{T0}) \\ \bar{\beta}_{w0}^* &= \sin^{-1}(\beta_0 \cdot \sin \alpha_0 / \alpha_{T0} / \cos(\bar{\alpha}_{w0}^*)) \end{aligned} \quad --(3.23)$$

订由 $\bar{\alpha}_{w0}^*, \bar{\beta}_{w0}^*, \vartheta_{w0}, \psi_{w0}$ 求到 θ_0, ψ_0 的几何关系式：

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \bar{\alpha}_{w0}^* + \sin^{-1}(\sin \vartheta_{w0} / \cos \bar{\beta}_{w0}^*) \\ \psi_0 &= -\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos \vartheta_{w0} \cdot (\cos \psi_{w0} + \sin \psi_{w0})}{\cos \bar{\beta}_{w0}^* \cdot \cos(\theta_0 - \bar{\alpha}_{w0}^*) + \sin \bar{\beta}_{w0}^*}\right] \end{aligned} \quad --(3.24)$$

通常， $\psi_{w0}=0$ ，所以

$$\psi_0 = -\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos \vartheta_{w0}}{\cos \bar{\beta}_{w0}^* \cdot \cos(\theta_0 - \bar{\alpha}_{w0}^*) + \sin \bar{\beta}_{w0}^*}\right] \quad --(3.25)$$

装

线

3.3. 弹丸运动的五自由度弹道计算模型^[3.8]

一、引言。

在计算名义弹道，即不带任何初始扰动及等价初始扰动的弹道时，一般来说，由重力引起的动力平衡改角是较小的。这时使用基于改角运动稳态值的4自由度模型计算得到射程，射偏的结果与刚体6D结果非常接近。^[3.2]中说明，动力平衡角 $2^\circ \sim 4^\circ$ 为经验允许值，但当此平衡改角超过 $2^\circ \sim 4^\circ$ ，将使散布加大。通过大量的仿真全弹道对比计算，发现L0BS^[3.3]、[3.4]程序在较高射角时射程、射偏的结果与刚体6D结果相差很大，这正是动力平衡改角过大造成的。当然，使用刚体6D或6D可以较好地描述改角运动过程，从而可以得到准确的弹道。但是，我们已经知道，6D模型中，同时包含了改角运动的快频过程和慢频过程，为了计算好快频过程不得不使计算步长缩得很小。经过小心的验证，发现名义弹道计算中的改角运动，快频的幅值远小于慢频的幅值，即快频率改角过程不占主要地位。既然如此，我们是否可以仅使用慢频改角运动来代替整个改角运动过程来进行弹道计算呢？回答是肯定的。这就是5D模型的基本思想。5D模型是4D与6D之间的一个折衷，其计算步长也是介于4D与6D之间的。实践表明，在计算名义弹道时，5D计算结

果与刚体 6D 结果符合得很好，但计算机时要比重达十几倍甚至上百倍。

C.H.Murphy 在 [3.12] 中也试图解决 4D 在高仰角情况下的大攻角运动不能很好地使用议角方程的稳态解来描述，从而造成较大计算误差的问题。但其主要仍是基于 4D 模型进行了一些修正工作，仍有局限性。本文介绍的 5D 模型可以说是在最大限度地补偿了 4D 在计算机名义弹道上的不足且回避了 6D 模型的大量计算。

装
订
线

二、五自由度弹道计算模型——5D

这里的推导主要在于如何计算单偏航角 $\vec{\alpha}_e$ [3.3]，即全攻角 α_e 在 ECS 中的投影。关于弹道方程见第二部分 §2.2 或 [3.11]

C.H.Murphy 在 [3.15] 中给出了复议角运动方程，参见式 (2.3)、式 (2.6)，使用了无量纲长度 \bar{s} 作为变量。显然，如果以时间为自变量，则式 (2.3) 中的 H, M, P, T 都是时变参数，而以 \bar{s} 或 s 为自变量，则 (2.3) 式就成为近似时不变线性系统了。所以，首先将议角运动方程转换至 \bar{s} 域，在 \bar{s} 域进行模型简化，将简化模型重写成 \bar{s} 域的议角运动微分方程，然后，将此微分方程转换至时域与弹道方程共同积分，则可以较好地实现 5D 模型思想，减少不必要的精度损失。

为了准确地考虑各运动参数对议角

运动的影响，这里从第二部分 §2.2 推导的
弹丸运动 6D 模型出发。在 \bar{S} -域，该角运动
方程为：

$$\tilde{\xi}'' + (H - iP) \tilde{\xi}' - (M + iP\Gamma) \tilde{\xi} = \tilde{D}_g \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 \quad \dots (3.26)$$

注意在 \bar{S} -域内， H, M, P, Γ 公式中应多 l ：

$$H = \bar{A} \cdot \left(\frac{l}{v}\right), \quad M = C \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2, \quad P = B \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2, \quad \Gamma = D \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 \quad \dots (3.27)$$

其中， $\bar{A}, B, C, D, \tilde{D}_g$ 同式(2.2)及式(2.7)，与式(2.3)
式(2.6)相比，这里多考虑了以下项：

1°) Magnus 力项

2°) 升力与俯仰阻尼力矩交叉项

3°) Magnus 力与陀螺力矩交叉项

4°) Magnus 力与俯仰阻尼力矩交叉项。

在 S -域使用系数固定方法 [3.1]，在固定时刻
(3.26) 式为一线性常系数系统，设其主导特征根
即慢频特征根为：

$$\tilde{\zeta}_s = \lambda_s + i\phi'_s \quad \dots (3.28)$$

其中， $[\phi'_s = \frac{1}{2}(P - (P^2 - 4M)^{1/2})]$

$$\lambda_s = -\frac{1}{2} \cdot (H + (2PH - PH)/(P^2 - 4M)^{1/2}) \quad \dots (3.29)$$

而式(3.26) 的稳态解为：

$$\tilde{\xi}_g = -\tilde{D}_g \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 / (M + iP\Gamma) \quad \dots (3.30)$$

为使式(3.26)保持式(3.30)的稳态解，而同时又仅
要保留其慢频主导特征根，则显然应有：

$$\tilde{\xi}' - \tilde{\zeta}_s \cdot \tilde{\xi} = -\tilde{\zeta}_s \cdot \tilde{\xi}_g \quad \dots (3.31)$$

将式(3.31) 转换至时间域，则：

$$\tilde{\xi} - \left(\frac{v}{l}\right) \cdot \tilde{\zeta}_s \cdot \tilde{\xi} = -\left(\frac{v}{l}\right) \cdot \tilde{\zeta}_s \cdot \tilde{\xi}_g \quad \dots (3.32)$$

$$\text{记 } \tilde{w} = -\left(\frac{v}{l}\right) \cdot \tilde{\zeta}_s \cdot \tilde{\xi}_g \quad \dots (3.33)$$

将式(3.32) 写成 α, β 的微分方程：

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = (\frac{V}{\lambda}) \cdot (\lambda_s \cdot \alpha + \phi'_s \cdot \beta) + \text{Im}(\tilde{W}) \\ \dot{\beta} = (\frac{V}{\lambda}) \cdot (-\phi'_s \cdot \alpha + \lambda_s \cdot \beta) + \text{Re}(\tilde{W}) \end{cases} \quad \cdots (3.34)$$

这里 α, β 的定义同 (2.12) 式。

将式(3.34)与弹道方程式(2.33)相分得 α, β , 使用式(2.31)就得到 α_e 。

这样, 就得到只保留攻角慢频过程的弹道计算方程组。由于在如弹道方程中又加了一对攻角慢频运动微分方程, 所以称之为五自由度模型。

装
订
线

三. 修正五自由度模型 —— $5D_m$

参见第二部分 3.2.2, 当攻角运动幅值较大时, 应考虑模型的修正。此时只要将(3.30)式的 D_g 以式(2.45)中的 \hat{D}_g 来代替即可。其余却不作变动, 这样就实现了修正五自由度弹道计算模型 —— $5D_m$ 。

四. 关于自适应步长。

从全弹道的计算来看, 在弹道的不同点上的攻角运动频率是不同的。我们知道数值积分步长的选择是与被积系统的特征频率密切相关的。在 $5D$ 模型弹道计算中, 式(3.28)中的 ω_s 实际上就代表了此简化系统的特征频率。所以, 积分步长 h 的公式应为:

$$h = (\frac{V}{\lambda}) \cdot \omega_s / (2N\pi) \quad \cdots (3.35)$$

其中, N 一般取为 $30 \sim 40$, 它代表一周期内的计算点数。计算表明, 采用这种自适

应调节步长的办法，大大减少了机时。图3.4为建议积分步长 $h-T$ 曲线。 $(N=40)$ 。

为形象地说明5D双段用以的慢模因数，使用同速 155mm. ERFB 弹以 $V_0=897\text{m/s}$, $\alpha E=45^\circ$, $\alpha_0=10^\circ$ 状态，图3.2、图3.3反映了6D、5D的双段过程对比。

装
订
线

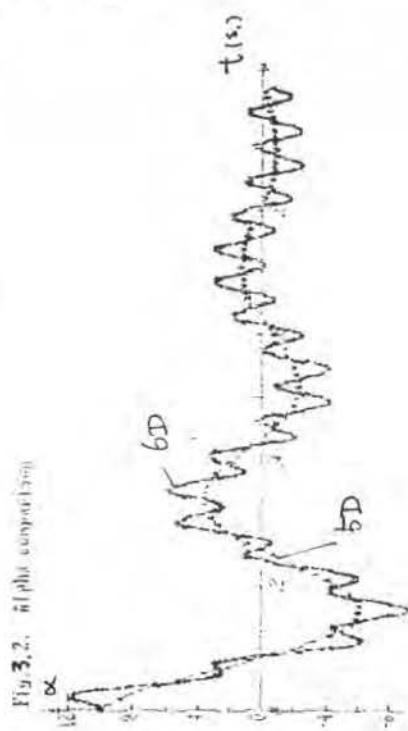
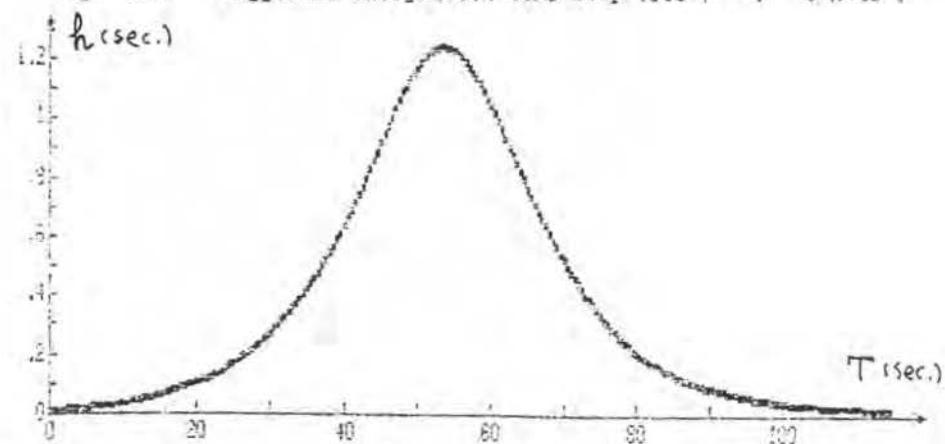


Fig. 3.2 Suggested integration time step (sec.) - T ($N=40$)



Fig. 3.3 6D & 5D data comparison



3.4 一个新的四自由度弹道计算模型 [3.8]

四自由度弹道计算模型很早就被提出了。自 1956 年 Lieske 提出了修正质点弹道的运动方程 [3.5]，关于 4D 模型的弹道计算软件相继出现，我国从 SRC 引进的程序 LOB 及 LOBS 就是这样的商品软件。[3.3], [3.4]

LOB 仅使用了简单的稳态平衡改角公式来描述名义弹道计数中的改角运动过程，其公式为：

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_e &= [-\alpha_g \cdot \sin \vartheta, \alpha_g \cdot \cos \vartheta, \beta_g]^T \\ \alpha_g &= \beta_g \cdot PT / M, \quad \beta_g = -I_x \cdot (P/V) \cdot g \cos \vartheta / \left(\frac{1}{2} p v^2 s l \cdot C_{n2} \right) \quad (3.3)\end{aligned}$$

其中， P, T, M 公式同式 (2.6)。显然，这是一线性稳态解。LOBS 修正了 LOB 中计算平衡改角的方式，使用较复杂的迭代并全部在 ECS 中求解，虽然加大了计算量，但忠实地应用了 Lieske 提出的平衡改角方程，从而改善了计算精度。1987 年，祁载康在 SRC，仔细分析了 Lieske 平衡改角的公式中坐标系之间的关系，提出了解 Lieske 平衡改角方程的一个快速法，使得新的算法要比原 LOBS 快近 40%！[3.10] 目前这新方法已取代了 LOBS 中原解法。这大大有利于火控计算机的在线计算。

从 5D 模型的分析可知，4D 模型仅是考虑改角运动方程的稳态解，作为平衡改角的公式。第二部分 3.2 中推导的改角运动方程 (2.23) 中，考虑了所有因素的影响，改角运动过程的稳态解为：

$$\tilde{\beta}_g = -\tilde{D}_g \cdot (\frac{V}{M+i \cdot PT})^2 \quad \cdots (3.37)$$

由于 $\tilde{\beta}_g$ 实际上包含非线性气动力系数，所以，从代数关系来看，应写作

$$\tilde{\beta}_g = f(|\tilde{\beta}_g|) \quad \cdots (3.37')$$

其中， $|\tilde{\beta}_g| = \alpha_+$ ，为全攻角。

式(3.37)为一非线性方程，要得到 $\tilde{\beta}_g$ ，一般采用迭代法。但如果使用上次的 $\tilde{\beta}_g$ 作为迭代初值，则式(3.37)会很快地收敛到与前 $\tilde{\beta}_g$ 的值。所以，本文介绍的 4D 模型，可以说是非常精确的 4D 模型，因为它从本文第二部分的 6D 出发，将所有的对平衡攻角有影响的因素都考虑进去了。实际计算表明，本文所提的 4D 模型与 Lieske 提出的平衡攻角计算公式，计算结果的精度是相同的。

从式(3.37) 送成改到 $|\tilde{\beta}_g|$ 后，令 $\alpha = \alpha_g$, $\beta = \beta_g$ ($i\alpha_g + \beta_g = \tilde{\beta}_g$)，使用式(2.31) 就得到 α 。

通过对比可知，[3.10] 中的快速方法比 L0B 多考虑了

1°) Coriolis 加速度项以及离心加速度项。

2°) Magnus 力系数项。

3°) Magnus 力与 Magnus 力矩的交叉项。

不过 [3.10] 中与俯仰阻尼有关的交叉项都未作考虑。Magnus 力及 Magnus 力矩的交叉项是很小的，几乎不起作用。相比之下，本文提出的 4D 模型，又要比 Lieske 提出的 4D 模型多考虑了以下项

1°) Magnus 力与陀螺力矩的交叉项。

2°) Magnus 力与俯仰阻尼力矩交叉项.

3°) 升力与俯仰阻尼力矩交叉项.

当然, 这些交叉项的影响都是较小的, 从实际计算来看, 本文 4D 与 Liske 提出的 4D 模型计算结果的最大差别也不到 0.5 来。但本文 4D 模型的计算量要小, 迭代简单且模型推导简单。目前 LOBS 程序已安装了这种新的 4D 模型。需要强调的是, 本文所提出的 4D 模型计算时间与 [3.1] 中的快速算法计算时间在同一水平, 都比原 LOBS 计算时间少 40%!

装

订

线

3.5. 模型切换问题的讨论

以上讨论了刚体 6D, 5D, 4D 模型, 其中, 5D, 4D 主要用于名义弹道的计算。一般地, 6D 及刚体 5D 模型只是用来研究初始扰动弹道。需要指出的是, 5D 模型虽然可以有初始扰动如 β_0 , 但它只是反映改向运动中的慢频过程, 不能用来研究扰动弹道, 参见图 3.2、图 3.3。

一般的弹道计算都是给定初始扰动, 计算扰动对弹道计算结果的影响。初始扰动包括初始角扰动和初始角速度扰动, 以及动不平衡、气动不对称等。通常, 后者都可以近似等效成初始扰动。^[3.2] 作为初始扰动, 对于正常弹, 一般会很快衰减。

所以, 基于 6D, 5D, 4D 的不同特点, 我们可

以将它们适当地组合起来计算弹道，这就是模型切换的问题。这样，对于扰动弹道的计算就也可能使用 6D 或 4D 从而大大减少计算机时。

我们知道，6D 包含了改角运动快慢与慢的过程，可以较好地描述改角运动过程。所以，在扰动弹道的初始阶段应使用 6D 模型进行计算。当扰动改角过渡过程结束，则等于回到了名义弹道的计算，因此，这时仍使用 6D 模型计算虽然是没有必要，当过渡过程结束以后的最大动力平衡角不是很大，如 $2^\circ \sim 4^\circ$ ，则可以使用 4D 模型计算，即将 6D 扰动弹道初始阶段过渡过程结束时的状态作为 4D 模型的初值，以后的弹道计算就采用 4D 模型，这样就实现了 6D-4D 模型的切换；当过渡过程结束以后的最大动力平衡角较大，如 5° 以上，则应使用 5D 模型进行计算。如果最大平衡改角大于 10° 则应使用 5D_m 模型进行计算。这就是 6D-5D 模型切换。

一般地，当扰动引起的初始改角运动不太大时，可以采用 6D 模型，但当改角最大值超过 10° ，就应该使用 6D_m 模型进行计算。

名义弹道上的动力平衡角最大值，通常出现在弹道顶点拐弯处。而此时较大的平衡改角常是由于高射角引起的较大射高，从而使得空气密度急剧下降所造成。

见式(3.36)，当接近弹道顶点时 $\vartheta \rightarrow 0$ ， $\cos\vartheta \rightarrow 1$ ，而分母中含 ρ ，所以 P 的下降会造成 β_g 的上升。由 [3.3]，

$$PT/M = (\rho g / V) \cdot (C_{m\alpha} + 2 \cdot k_a^2 \cdot C_{\alpha}) / C_{m\alpha} \quad \dots (3.38)$$

所以， α_g 也随 β_g 增大而增大。

关于 $6D$ 与 $6D_m$ ， $5D$ 与 $5D_m$ 之间的切换仅由议角运动幅值来决定。这个切换议角阈值一般取为 10° 。但 $6D$ 与 $4D$ ， $6D$ 与 $5D$ 切换准则可以是多样的，最简单的是以时间决定是否切换，这个切换时刻由用户置定。一般地，对于一个正常弹，其扰动过渡过程的时间数量级概念是已知的，如 20 秒等。当然，切换时刻过于向前，以至于过渡过程还未完全结束，就会产生计数误差。

实际计数表明， $6D$ 与 $5D$ 的结果精度是相近的，所以在一般的名义弹道计数中，只使用 $5D$ 、 $5D_m$ 及 $4D$ 就可以了。刚体 $6D$ 仅用于需要精确计数的场合，一般也只用来核校 $6D$ 、 $5D$ 、 $4D$ 模型的计数结果。

第二章 炮弹弹道仿真软件及仿真结果的讨论.

§2.1 程序 LOB6 与 LOB456

结合本部分第一章 §1.2 推导的刚体 6D 模型，在[3.13]的基础上，完成了标准刚体 6D 弹道仿真程序 LOB6。它的大气模型、重力模型、底部排气模型、火箭推力模型以及积分模块都与 SRC 的 LOBS 相同，并且采用了与 LOBS 相同的输入文件格式，加上式(3.3~3.5) 的输出变换以及(3.23~3.25)的输入变换，使得 LOB6 能与 LOBS 配合使用，LOB6 可以作为一个标准。虽然 LOB6 采用了 QBCS，但与弹体有关的扰动仍可以通过 P 南变换到 QBCS 上，因此如同 LOBO 可以加入各种扰动。如没有与弹体有关的扰动，则积分步长就与转速元直接关系，而仅与南运动的快慢有关。再者，LOB6 的气动力是义在 TAWCS 上，使得较大仰角时的气动力反力矩的计算更为准确合理。

LOB456 可以说是 LOBS 的一个更新换代的版本。它集 4D、5D_m、6D_m、5D、6D 以及模型切换等诸多模型于一身，由一个开关来决定弹道计数所使用的模型或模型组合。从用户的角度看，仅是输入文件中 ISG 作了变动，其余除 LOBS 的功能全部保留。下面是 ISG 开关及其说明。

LOB456 中 4D 模型使用了本文算法。当 ISG

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

为 2, 4 时, 要输入 K_{10}, K_{20} ^[3.3]; $ISG = 3, 6, 7$ 时
要输入 α_0, β_0 ; $ISG = 5, 8, 9, 10, 11$ 时要求输入 α_0, β_0
及 $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$; 当 $ISG = 10, 11$ 还要输入模型切换时间
 T_c .

装
订
线

ISG	说明
0.	4D 模型, 不计示不输出 SG (稳定因子)
1.	4D 模型, 计算并输出 SG
2.	4D 模型, 计算初始扰动引起的双向阻 力 (K_{10} 与 K_{20})
3.	5-D, 5-D _m 自动切换模型
4.	同 ISG=2, 但使用 5D _m 模型
5.	6D, 6D _m 自动切换模型
6.	仅为 5D 模型
7.	仅为 5D _m 模型
8.	仅为 6D 模型
9.	仅为 6D _m 模型
10.	6D _m - 5D _m 模型切换
11.	6D _m - 4D 模型切换

总之, LOB456 是一个综合性实用程序,
它本质上仅是变动了 LOBS 的弹道计祿模型。
LOBS 的其它功能诸如: 间接射击数据处理、
直接射击数据处理、散布分析、真实大气
标准弹道计祿等都保留使用, 尤其是 LOBS
很具特色的事件记录功能能在 LOB456 中正常
发挥。熟悉 LOBS 的用户可以非常容易地使

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

用 LOB456.

程序 LOB6、LOB456 系统地将本部分所介绍的模型都软件化，而且使它们之间具备了可比较性。这对进一步研究弹的运动内在机理是极为有用的。目前它们已在 IBM-PC/XT 以及 MICRO-VAX-II 上编译运行，并开始出售用户。

在下面的仿真计算中，如不特别声明，一般使用 SRC 155mm. ERFB MK10 MOD2 加农炮弹，其气动力特性见附录。所有计算均为标准大气条件，不带底部排气，有小舵。

装

订

线

§2.2, $ISG = 0 \sim 9$ 支形

以 $V_0 = 795 \text{ m/s}$, $\alpha_E = 72^\circ$ 为例, $\alpha_0 = \beta_0 = 0^\circ$, $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 0$, 采用定步长 P-C 法积分，在 IBM-PC/XT (带 8087) 上运行，有下表。

由表可知，在计算名义弹道上，5D 与 6D, 5D_m 与 6D_m 计算结果是相同精度的。所以，6D 及 6D_m 在名义弹道计算中完全可以被 5D 或 5D_m 代替。也就是说，5D 已经相当好地在 4D 与 6D 之间作了折衷。对比标准刚体 6D 的结果，5D 可以代替刚体 6D 进行弹道计算 ($ISG = 3, 6, 7$)，而 6D 模型可以代替刚体 6D 来研究初始扰动等 ($ISG = 5, 8, 9$)。

在这组仿真计算中，全弹道最大平偏改向达 27° ，所以这组数据比较典型。4D 比

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

ISG(Range Deflection Flight time CPU time)			
	(m.)	(m.)	(sec.)
10	15902	1622.7	114.21
11	15902	1622.7	114.21
12	15902	1622.7	114.21
12	15260	1536.1	111.83
13	15881	1516.9	114.56
14	15258	1437.5	112.20
15	15880	1515.3	114.55
16	15930	1510.2	114.74
17	15884	1516.0	114.53
18	15927	1510.2	114.74
19	15881	1514.5	114.53

装

订
线

5D、6D 结果要差得很多，从名义弹道计算来看，也可見本文 5D 的效果。但是，当全弹道最大平衡改向较小吋，例如，取 $V_0=897 \text{ m/s}$, $\alpha_E=45^\circ$ ，则弹道最大平衡改角只有 $2^\circ \sim 3^\circ$ ，有下表：

	刚体 6D	4D	5D, 6D
射程 (m.)	29703	29706	29706
射偏 (m.)	990.6	997.0	989.0

可見，此时刚体 6D、4D、5D、6D 的結果是非常接近的。

5D 弹道积分步长建议取 0.01 秒，积分模块参数若取 $J1=2$, $EC=1$, $ENE=3.0$ [3.3]，则可有效地进行自动步长调节，大々减少了计算机时。仍以 $ISG=7$, $V_0=795 \text{ m/s}$, $\alpha_E=72^\circ$ 为例，此时计算结果为：

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

射程: 15884 (m.) , $T_f = 114.55$ (s.)

射偏: 1516.0 (m.) , CPU 时间: 91 (s.)

这与定步长计算相比要节省机时 17.8 倍 (1628:91) 且保持定步长计算精度。采用自动调节步长的 5D 仅比 4D 慢 4~6 倍。

6D 模型积分步长建议取 0.002 秒。积分模块参数同上。如需要定步长积分, 则取

$$JI = 2 \text{ 或 } 3; EC = -1; ENE = 0$$

关于全弹道计算时间, 实际上无论使用刚体 6D 还是 4D、5D、6D 模, 其每积一步的时间是相近的。计算时间的主要差别应来自积分步长的差别。下面是在 Micro VAX-II 上进行统计出来的每积一步的计算机时对比(单位:毫秒 ms.):

程序或模型名称	刚体 6D	4D	5D	6D	LOBS
每积一步耗时(ms.)	18.7	15.5	16.6	14.4	25.5

在统计这些时间时, 要注意到输入/输出是要占时间的。为了不使输入/输出与外设打交道的时间占主要地位, 计算时采用小步长, 尽量不作输出。如 LOBS 或 4D, 应采用 0.01 秒步长计算来最后得到每积一步所耗时间, 这样得到的数据才是较为可靠的。我们从 LOBS 与 4D 的每积一步所耗时间来看, 又因为它们可使用相同积分步长如 1 秒, 所以, 可以说 4D 要比 LOBS 快 40% 即 4D 机时仅为 LOBS 的 3/5.

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

为使读者对 4D, 5D, 6D 有一个更直观的了解，这里给出几幅作者在 SRC 绘制的曲线。

图 3.5 为 $\beta-\alpha$ 矢量端圆对比 (ERFB 155mm.)

图 3.6 为 α_t-t 曲线 (同上)

ERFB 155mm. 弹道运动特性列于附录。

图 3.7. 图 3.8 为巴黎炮 (Paris big gun) 的结果。

在 G.V. Bull 的努力下，赫尔有名的巴黎大炮
运动特性得以复原，运动特性列于附录。
全弹道上的最大半偏角高达 30 多度，

图 3.7 为 $\beta-\alpha$ 矢量端圆对比 (Paris big gun)

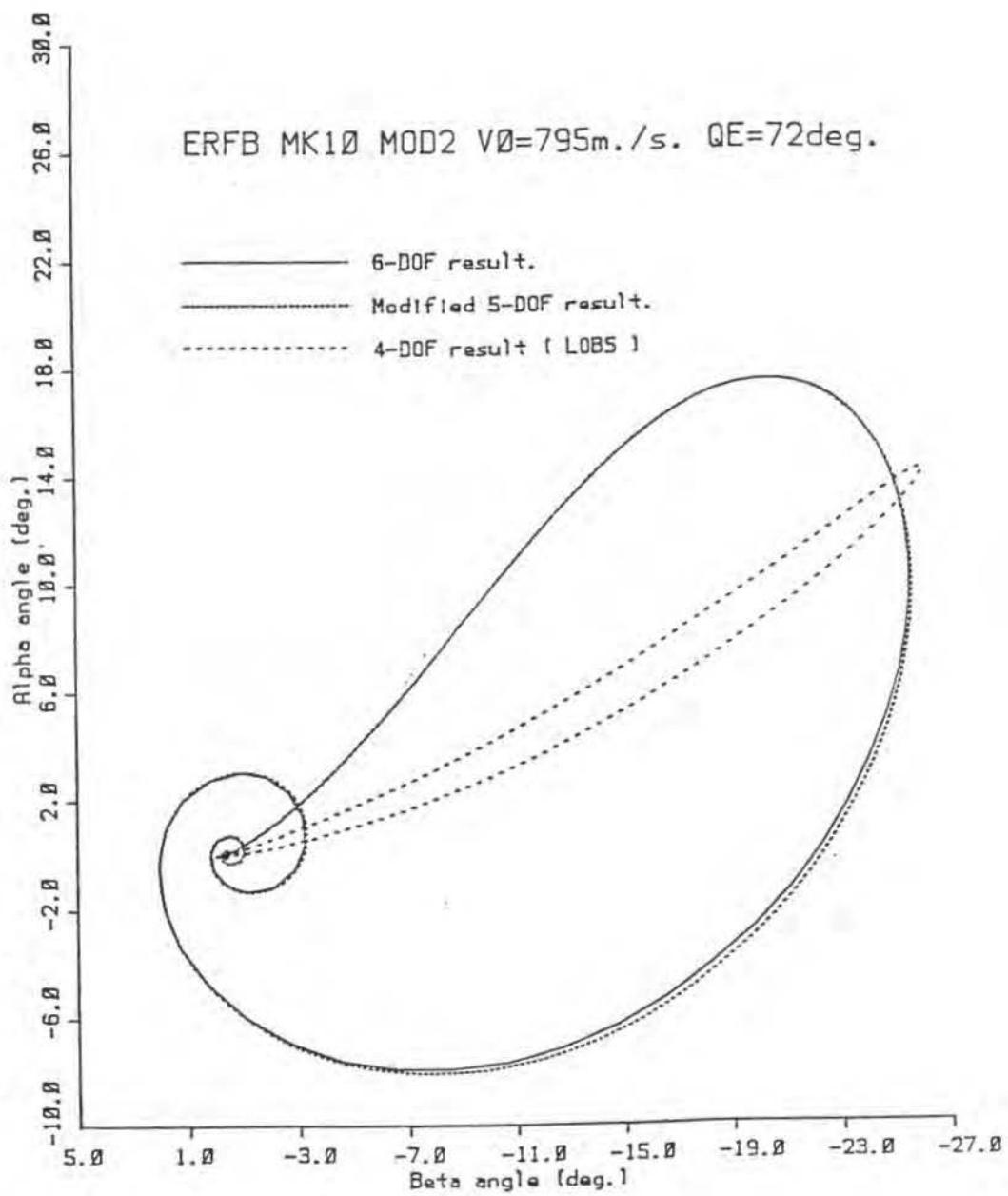
图 3.8 为 α_t-t 曲线 (同上)。

此弹道计算结果对表如下。

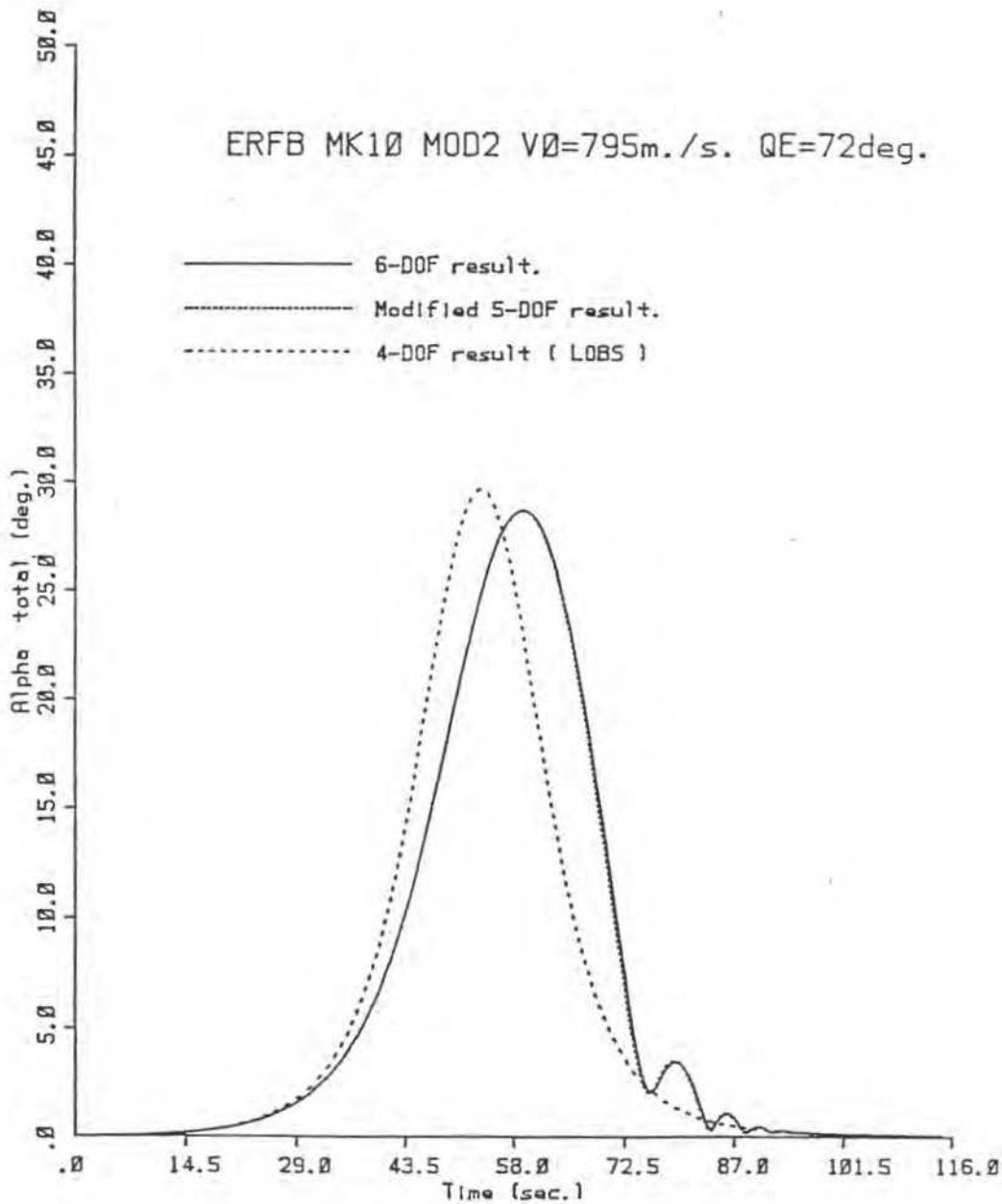
巴黎大炮, $V_0 = 1646 \text{ m./秒}$, $QE = 50^\circ \text{ deg.}$

	刚体 6D	5D	5D _m	4D (LOBS)
射程 (米)	128469	128375	128484	129724
射偏 (米)	6062	6314	5988	6295

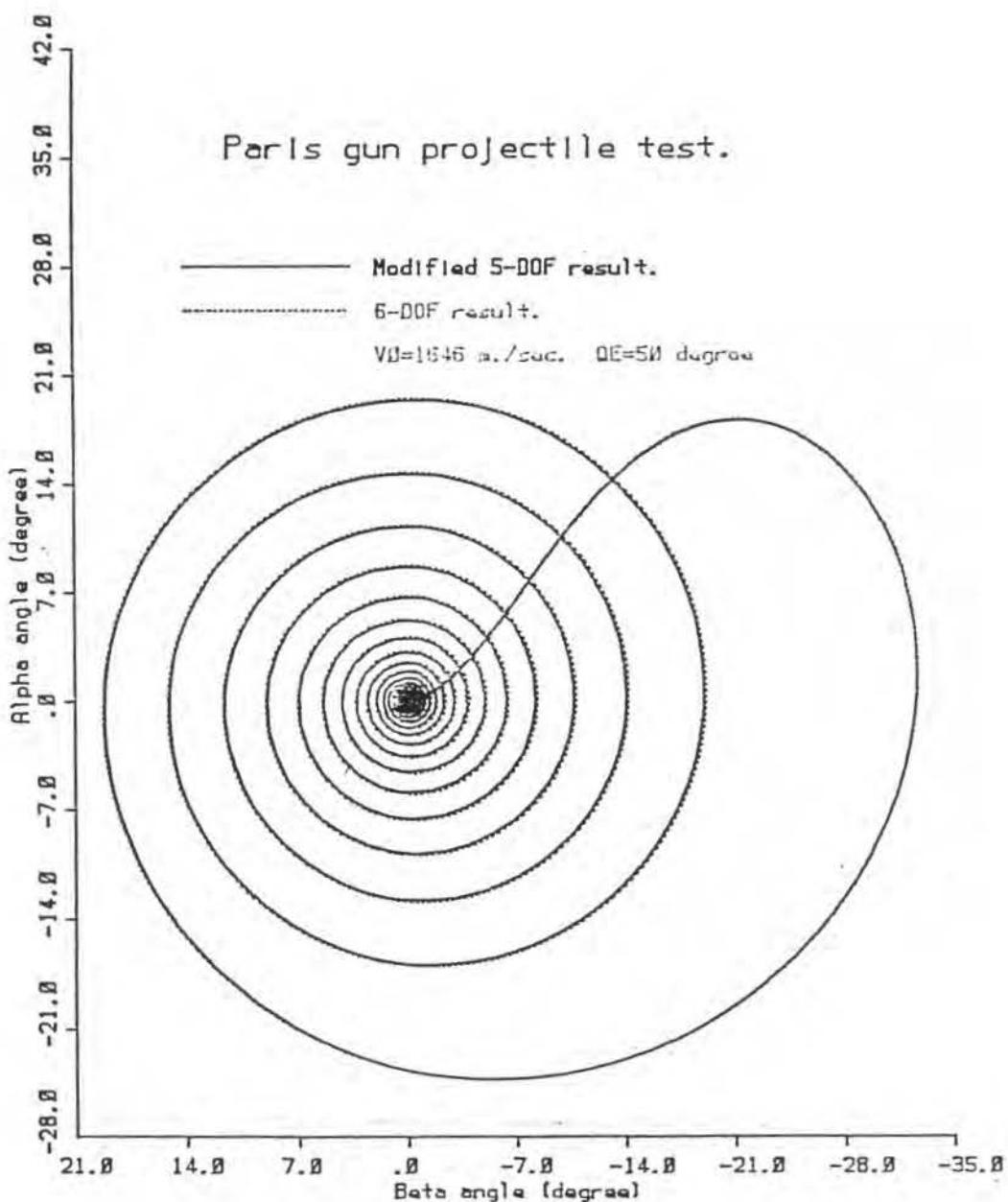
这些图线都表明，本文的 5D 是可行的，有效的。



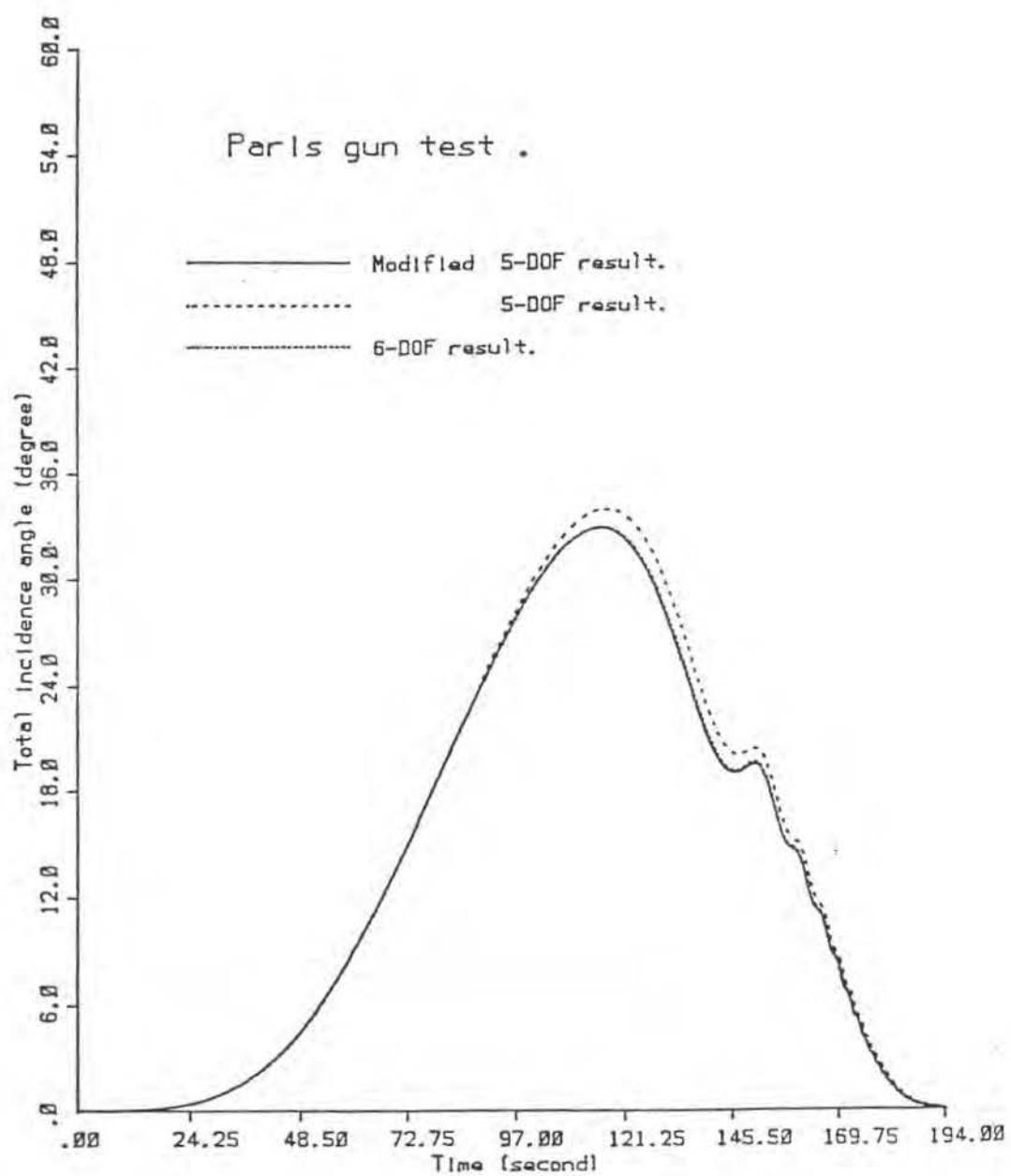
12/3.5



12/3.6



1/2 3.7



[图] 3.8

§2.3. $ISG = 10, 11$ 特形

这一节专门介绍模型切换的仿真计算结果及结论。这里仅用

$V_0 = 897 \text{ m/s}$, $QE = 45^\circ$, $\alpha_0 = 10^\circ$ 初始扰动

模型切换时间 $T_c = 10$ (秒)。

考虑以下 6 种计数特况的对比

1°) $ISG = 10$, 10 秒切换到 $5-D_m$ 模型, $\alpha_0 = 10^\circ$ 扰动。

2°) 刚体 6D 标准计数, $\alpha_0 = 10^\circ$ 扰动。

3°) $ISG = 7$, 仅用 $5-D_m$ 计数, $\alpha_0 = 10^\circ$ 扰动

4°) $ISG = 2$, 仅用对应于 $\alpha_0 = 10^\circ$ 扰动的 $k_{10} = -1.94^\circ$,
 $K_{20} = 11.94^\circ$ (此时 $K_m = 1.38$) [3.9]

5°) $ISG = 9$, 仅用 $6D_m$ 模型, $\alpha_0 = 10^\circ$ 扰动。

6°) $ISG = 11$, 10 秒切换到 4D 模型, $\alpha_0 = 10^\circ$ 扰动

得如下结果: (IBM PC/XT 带 8087)

装
订
线

方法	时间 (秒)	误差 (%)	耗时 (秒)
1	1272.9	15.5%	1.021
2	1272.67	15.5%	0.533
3	1274.14	15.5%	0.532
4	1272.18	15.5%	53
5	1272.25	17.2%	0.533
6	1292.93	32.7%	772

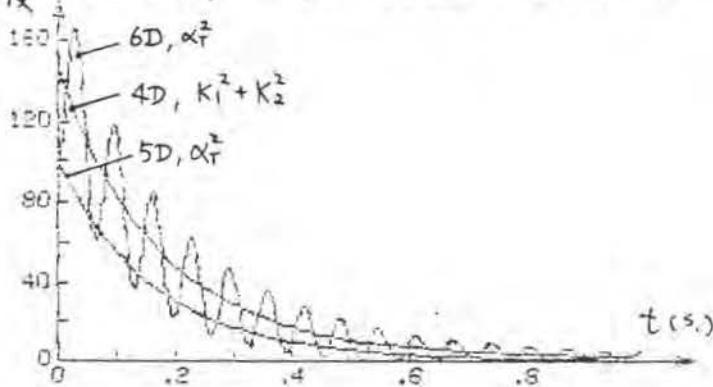
可见, $6D_m - 5D_m$ 切换计数与一直使用 $6D_m$ 模型计数的结果精度是相当的, 而且与刚体 6D 标准结果也很接近。所以, 使用 $6D - 5D$ 切换的思想是可行的, 大大减少了计数机时。
 同样, $6D - 4D$ 切换模型的计数结果与 $6D - 5D$ 切换模型计算结果相近, 这主要是由于当过

渡过程结束后弹道上的最大攻角较小的原因所造成的。当然，若将模型切换时间 T_c 增大，还会使 6D-5D 及 6D-4D 切换模型的计算结果精度有所提高。

5D 由于不能反映攻角运动的快慢过程参见图 3.2 及图 3.3，从扰动弹道的计算结果来看，5D 对初始扰动弹道计算是不可用的。

4D 模型的 k_{10}, k_{20} 由于能与初始角扰动相换算 [3.9]，所以按此换算，其“平均效应”的结果使得射程是基本正确的，但其偏航结果是不能接受的。这是因为 4D 不能预测初始扰动引起的气动突跳等而造成的偏航偏转。这里“平均效应”是指取攻角平均衰减过程对攻角阻力的影响。具体请参阅 [3.11] [3.6] 根据 k_{10}, k_{20} 的理论， $(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ 就是攻角平均值。图 3.9 证实了这一点。 $(V_0 = 897 \text{ m/s}, \alpha_0 = 45^\circ, \alpha_1 = 10^\circ)$

Fig. 3.9. Alpha total comparison



3.2.4 结论

通过大量的对比计算，对本文所介绍的刚体 6D 模型、4D、5D、6D 模型及 6D-5D、6D-4D 切换模型，可以得到下述简要结论。

1. 在计算名义弹道时，如果弹道上最大平衡改角为 $2^\circ \sim 4^\circ$ ，则 4D、5D、6D 模型的计算精度是相近的，而且与刚体 6D 模型的计算结果也相近。
2. $5D_m$ 当最大平衡改角较大时，计算精度要比 5D 好，同样，此时 $6D_m$ 要比 6D 精度高。
3. 计算名义弹道时，当最大平衡改角较大时， $5D_m$ 、 $6D_m$ 模型计算精度与刚体 6D 结果精度相近。但此时 4D、5D、6D 误差较大。
4. 在计算名义弹道方面，5D、 $5D_m$ 可以完全代替 6D、 $6D_m$ ，它们的计算精度相同。
5. 5D 可以代替刚体 6D 进行名义弹道的计算，但 5D 不能用于对初始扰动的研究。
6D 可以代替刚体 6D 来对初始扰动对弹道的影响等进行研究。刚体 6D 仅作为一个校核的标准。
6. 6D-5D 以及 6D-4D 模型切换计算，针对弹道不同阶段的不同特点采用相应的模型，抓住了主要矛盾方面，大大减少了计算机时间又不失计算结果精度，可以代替 6D 或刚体 6D 模型来对初始扰动弹道进行计算。这对散布研究，如 Monte-Carlo 方法等是有用的 [3.13]

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

8°. 本文研制的软件 LOB6, LOB456, 构成了弹道计算模型系列, 而且它们采用相同的输入, 方便使用, 并具有结果的相互可比性、可验证性。软件具有很好的可移植性、可读性和可维护性, 有较好的推广使用的商品价值。

装

订

线

第三章 初始扰动对弹道影响的研究^(3.9)

3.3.1. 概述.

我们知道，对于稳定弹，初始扰动引起的攻角过渡过程会很快结束。但是，尽管这个过渡过程时间非常短，过渡过程产生的攻角会影响速度矢量的方向，使得无扰动弹道的射面发生变化，通常地这样的速度矢量的方向变化叫“气动突跳”。当气动突跳发生在纵向面就造成射程的误差，而发生在侧向面时就造成侧偏的误差。

在实际发射中，由于初始炮口抖动等造成的扰动以及动不平衡等扰动因素，都可以用角扰动或角速度扰动来描述。由于过渡过程较快，射面的变化是可以预测的。如能较好地预测已知扰动条件下的射面变化情况，对于估计各种扰动作用下的散布是很有实际意义的。

一个弹系统是一个复杂的动力学系统，它可以从控制理论的角度将其看成一个开环、带初始条件的时变多变量非线性系统。在研究初始扰动时，因重力引起的驱动项 D_g 对气动突跳影响较小，可忽略不计。

使用状态空间法描述弹的运动，有：

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad -(3.39)$$

其中， $\mathbf{x} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \alpha, \beta, \dot{p})^T$ 或者

$\mathbf{x} = (v, \theta_v, \psi, x, y, z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \alpha, \beta, \dot{p})^T$ 为弹的状态

本章主要讨论基于上述模型的简化模型的

气动突跳定性规律。虽然 Murphy 在 [3.6] 中专门阐述了气动突跳问题，但文中推导复杂且无数据支持，而且对于扰动的一些定性的结论没有给出。本章试图弥补这一不足。

3.3.2. 气动突跳模型及分析。

一. 气动突跳模型。

从式(3.39)所述系统可以使用六自由度模型如刚体 6D 或 6D 来实现，通过数值积分了解初始扰动的影响，但这不利于理论定性分析。这里依旧本文第二部分式(2.3)所述线性时不要改用运动模型，在研究初始扰动影响时可以忽略：

$$\ddot{\tilde{x}} + (H - iP)\dot{\tilde{x}} - (M + iP\dot{T})\tilde{x} = 0 \quad -(3.40)$$

H, M, P, T 公式同式(2.6)，上式写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}'' + \begin{bmatrix} H & -P \\ P & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -M & -P\dot{T} \\ P\dot{T} & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \quad -(3.40)'$$

注意，这里 $(*)' = \frac{d}{ds}(*)$ ， s : 无量纲长度 (cal.)
设由初始扰动引起的速度方向角的变化为：

$$\tilde{\theta}_v = i \cdot \Delta \theta_v + \Delta \psi_v \quad -(3.41)$$

这里 $\Delta \theta_v, \Delta \psi_v$ 的含义是相同时刻或相同无量纲长度 s 处扰动弹道与名义弹道的连接倾向、速度偏角的差值。那么，气动突跳 \tilde{A}_J 为

$$\tilde{A}_J = \frac{l}{s} \cdot \tilde{\theta}_v, \text{ 或 } A_J = [A_{JR}, A_{JZ}] = \frac{l}{s} \cdot [\Delta \theta_v, \Delta \psi_v]^T \quad -(3.42)$$

记：
 $e_1 = (psl/2m) \cdot C_{Lx} = C_{Lx}^*$
 $e_2 = (psl/2m) \cdot (\rho l/2v) \cdot C_{yph} = \bar{C}_{yph}$ $\cdots (3.43)$

根据式(2.10), 式(2.15), 及考虑线性化气动系数，并

不考虑重力影响则有：

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_v \\ \Delta\psi_v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \dots (3.44)$$

记 $\mathbf{x}_a = [\alpha, \beta]^T$, $\mathbf{x}_v = (\Delta\theta_v, \Delta\psi_v)^T$, 式(3.40)、式(3.44)可写成：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a'' + \begin{bmatrix} H & -P \\ P & H \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_a' + \begin{bmatrix} -M & -PT \\ PT & -M \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_a &= 0 \\ \mathbf{x}_v' = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_a \end{aligned} \quad \dots (3.45)$$

$\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_v$ 为 \mathbf{x} 的子状态，这里需要知道 $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a'$ 的初值对 \mathbf{x}_v 终值的影响。

对式(3.45) 两边作 Laplace 变换，有：

$$\begin{aligned} s \cdot \mathbf{x}_v(s) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_a(s) \\ s^2 \cdot \mathbf{x}_a(s) + \begin{bmatrix} H & -P \\ P & H \end{bmatrix} \cdot s \cdot \mathbf{x}_a(s) + \begin{bmatrix} -M & -PT \\ PT & -M \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(s) - s \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha'_0 \\ \beta'_0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} H & -P \\ P & H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (3.46)$$

由上式得到

$$\mathbf{x}_a(s) = \left[\frac{s^2 + Hs - M}{P \cdot s + PT}, \frac{-Ps - PT}{s^2 + Hs - M} \right]^T \cdot \begin{bmatrix} s \cdot \alpha_0 + \alpha'_0 + H\alpha_0 - Pb_0 \\ s \cdot \beta_0 + \beta'_0 + H\beta_0 + Pb_0 \end{bmatrix} \quad \dots (3.47)$$

其中, $\alpha_0, \beta_0, \alpha'_0, \beta'_0$ 为初值扰动。一般记

$$\tilde{\xi}_0 = i\alpha_0 + \beta_0, \quad \tilde{\xi}'_0 = i\alpha'_0 + \beta'_0 \quad \text{或}$$

$$\mathbf{x}_a|_0 = (\alpha_0, \beta_0)^T, \quad \mathbf{x}_a'|_0 = (\alpha'_0, \beta'_0)^T$$

将(3.47)式代入(3.46)式，并由 Laplace 变换的终值定理，有关运动突跳

$A_J = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathbf{x}_v(s)$, 则有：

$$A_J = \begin{bmatrix} A_1 \cdot (\alpha'_0 + H\alpha_0 - P\beta'_0) + A_2 (\beta'_0 + H\beta_0 + P\alpha_0) \\ -A_1 \cdot (\alpha'_0 + H\alpha_0 - P\beta_0) + A_2 (\beta'_0 + H\beta_0 + P\alpha_0) \end{bmatrix} \quad \cdots (3.48)$$

其中， $A_1 = -(e_1 M + e_2 PT) / (M^2 + P^2 T^2)$
 $A_2 = -(e_2 M - e_1 PT) / (M^2 + P^2 T^2)$ $\cdots (3.49)$

写成复数形式，式(3.48)为：

$$\tilde{A}_J = -\frac{e_1 + ie_2}{M + iP T} [\tilde{\xi}'_0 + (H - iP) \cdot \tilde{\xi}_0] \quad \cdots (3.50)$$

对于实P₀弹性， $e_1 \gg e_2$, $M \gg PT$, $P \gg H$, 所以,

$$\tilde{A}_J = -(e_1/M) \cdot (\tilde{\xi}'_0 - iP\tilde{\xi}_0) \quad \cdots (3.51)$$

或 $A_J = \begin{bmatrix} -(e_1/M) \cdot (\alpha'_0 - P\beta'_0) \\ -(e_1/M) \cdot (\beta'_0 + P\beta_0) \end{bmatrix} \quad \cdots (3.52)$

装

二. 角速度扰动分析

仅考虑角速度扰动，即 $\tilde{\xi}_0 = 0$ ($\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$)，
 则从式(3.48), 式(3.50), 式(3.51), 式(3.52), 有气动突跳

$$\tilde{A}_J = -\frac{e_1 + ie_2}{M + iP T} \cdot \tilde{\xi}'_0 = -(e_1/M) \cdot \tilde{\xi}'_0 \quad \cdots (3.53)$$

或 $A_J = \begin{bmatrix} A_1 \alpha'_0 + A_2 \beta'_0 \\ -A_2 \alpha'_0 + A_1 \beta'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(e_1/M) \cdot \alpha'_0 \\ -(e_1/M) \cdot \beta'_0 \end{bmatrix} \quad \cdots (3.54)$

这说明了 $\tilde{\xi}'_0$ 与 \tilde{A}_J 的方向相反。即向右的初始抖动会造成向左的气动突跳，使得侧偏比正常计算(无扰动)值要小，见图3.10。从式(3.54)也可以看出，纵向的角速度扰动会造成侧向的气动突跳从而影响侧偏的计算转度；侧向的角速度扰动会造成纵向的气动突跳，从而影响航程的计算结果。

假设 $|\tilde{\xi}'_0|$ 相同，在不同中角(见图3.11)时加

入扰动，令 $\tilde{\xi}_0 = 0$ ，那么从刚体 6D 数值积分得到的扰动弹道射偏 D_d 与名义弹道射偏 D_n 之差 ΔD ，实际上就反映了侧向运动突跳的大小及方向关系。

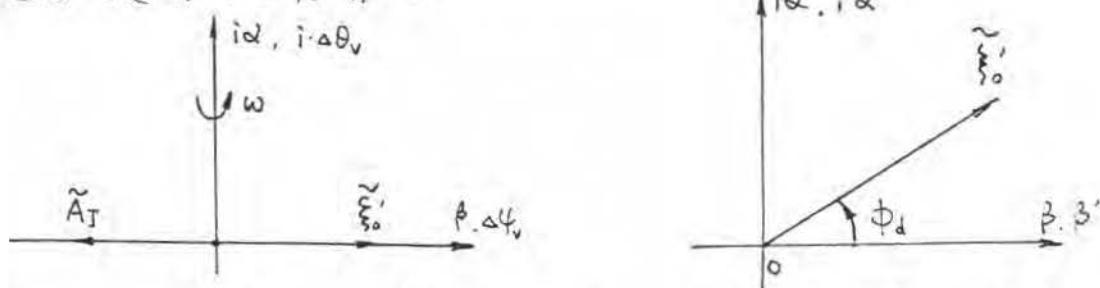
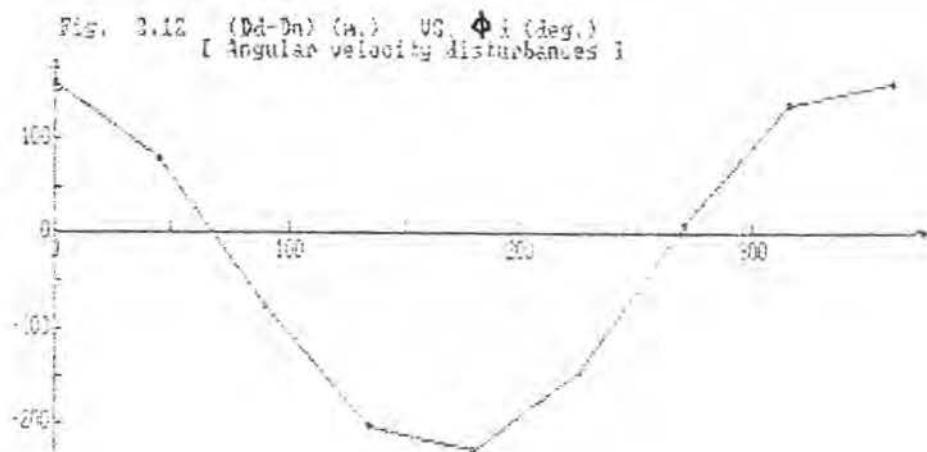


图 3.10， $\dot{\xi}_0$ 与运动突跳 ϕ_d 的关系。图 3.11， ϕ_d 角定义
以 $|\dot{\xi}_0| = 2$ 转/秒为 131°，注意到

$$(\frac{d\tilde{\xi}_0}{dt})_0 = \frac{V_e}{L} \cdot \tilde{\xi}_0$$

订 装 由 SRC ERFB MK10 MOT2 弹 (155mm)，由刚体 6D 程序
线 LOB6 计算得到 $\Delta D \sim \phi_d$ 曲线，见图 3.12， $V_0 = 897 \text{ m/s}$
 $\theta_E = 45^\circ$ 。



由图 3.12，当 $\phi_d = 180^\circ$ ，即图 3.10 所描述的特征。
此时 ΔD 最小，即 D_d 最小； $\phi_d = 0^\circ$ 时 ΔD 最大，即

D_0 最大。因此炮口的左右抖动，对弹道的侧偏影响最为严重。当 $\alpha_0 = 90^\circ$ 或 270° 时， ΔD 接近0，就说明了炮口的上下抖动对侧偏的散布“贡献”较小。

类似地可以对纵向气动突跳进行计算。从图3.12来看，实际计算与上述理论定性分析的结论是吻合的。

三 攻角扰动分析

仅考虑攻角扰动，那么 $\tilde{\beta}_0 = 0$ ($\alpha_0' = \beta_0' = 0$)，气动突跳 \tilde{A}_J 或 A_J 的公式为：

$$\tilde{A}_J = \frac{(e_1 + ie_2)}{M + iP} \cdot (H - iP) \cdot \tilde{\beta}_0 = \frac{i \cdot e_1}{M} \cdot P \cdot \tilde{\beta}_0 \quad \dots (3.55)$$

$$A_J = \begin{bmatrix} A_1 \cdot (H \cdot \alpha_0 - P \beta_0) + A_2 \cdot (H \beta_0 + P \alpha_0) \\ -A_2 \cdot (H \alpha_0 - P \beta_0) + A_1 \cdot (H \beta_0 + P \alpha_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot P \cdot \beta_0 / M \\ -e_1 \cdot P \cdot \alpha_0 / M \end{bmatrix} \quad \dots (3.56)$$

这表明， A_J 比 $\tilde{\beta}_0$ 超前 90° 。从式(3.56)可见，纵向面的攻角扰动会在侧向产生气动突跳，而且向上的攻角跳动能会产生向右的气动突跳，从而使侧偏增大。如图3.13

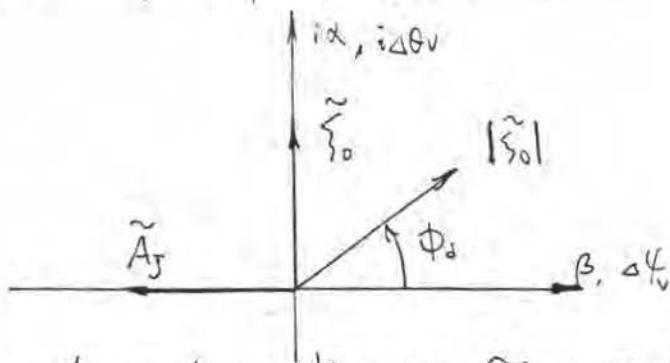
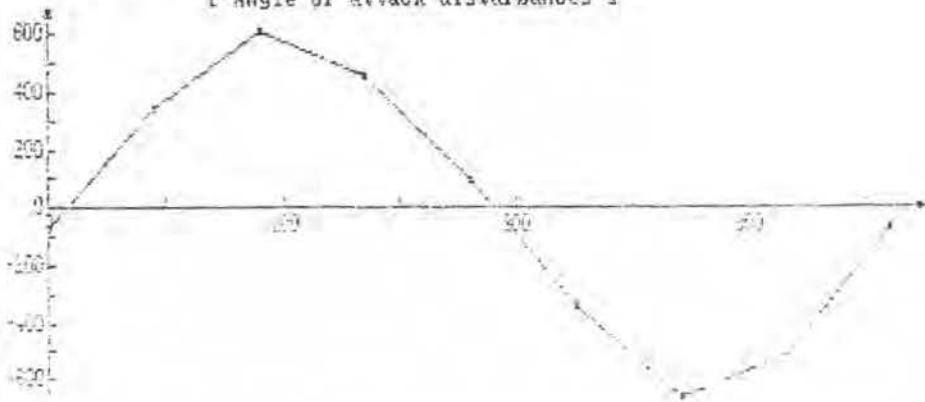


图3.13 气动突跳与 $\tilde{\beta}_0$ 的关系。

同样，侧向面的攻角扰动会在纵面上产

生气动突跳。为证实这些定性的结论，令 $|\tilde{\gamma}_0|=15^\circ$ ，作与(二)相同的计算，得到类似图3.12的 $\Delta D \sim \Phi_d$ 中。曲线见图3.14

Fig. 3.14 $(\Delta D - D_0) (\%)$ vs. Φ_d (deg.)
[Angle of attack disturbances]



装

订
线

由上图知，当 $\Phi_d=0^\circ, 180^\circ$ 时， $\alpha_0=0$ ，所以侧向运动突跳近似为0，所以 $\Delta D-\Phi_d$ 曲线中， ΔD 近似为0；当 $\Phi_d=90^\circ$ 时就是图3.13所描述的情形。此时 ΔD 最大，即 D_d 最大；当 $\Phi_d=270^\circ$ 时， $\alpha_0=-15^\circ$ ， $\beta=0^\circ$ ，侧向运动突跳正值最大，即射面向左偏转最多，使得射偏比正常弹道的射偏要小。这些刚体6D的数字计算结果与上述的理论定性分析也是符合的。

四. 讨论

上面的分析中得到气动突跳的一些定性的规律。从式(3.51)、式(3.52)可知，气动突跳主要决定因素为 e 及 M ，即 $C_{L\alpha}$ 与 $C_{m\alpha}$ 写成气动系数的形式：

$$A_T = -(k_f^2 \cdot C_{L\alpha} / C_{m\alpha}) \cdot (\tilde{\gamma}_0' - i P \tilde{\gamma}_0) \quad \text{--(3.57)}$$

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

$$\text{或}, \quad A_J = -\frac{k_t^2 \cdot C_{Lx}}{C_{m\alpha}} \cdot \left[\frac{\alpha_0' - P\beta_0}{\beta_0' + P\alpha_0} \right] \quad \dots (3.58)$$

应该注意到本文推导的气动突跳模型使用线性时不变假设。当较大攻角运动引起非线性气动系数 C_{Lx} , $C_{m\alpha}$ 起作用时, 则理论计算与实际仿真计算值就会有偏差。此时也只有使用 6D 进行数值计算, 为减少计算机时可以采用本文第二章介绍的 6D-5D 及 6D-4D 切换模型方法进行计算。

需要注意的是, 这里 A_J 是定义在空间的气动突跳。因此, 在估算气动突跳引起的侧偏变化 ΔD 时, 应使用 A_J 投影至地面上。

$$\Delta D = R \cdot A_J / \cos \theta_{v0} \quad \dots (3.59)$$

仍用 SRC 155 MM, ERFB MK10 MJD2 弹 $V_0 = 897 \text{ m/s}$, $\alpha_E = 45^\circ$, $(d\tilde{\gamma}/dt)_0 = 2 \text{ 转/秒}$ 为例, 令 $\phi_d = 0^\circ$, 则气动突跳:

$$A_{JD} = (k_t^2 \cdot C_{Lx} / C_{m\alpha}) \cdot \left(\frac{l}{V} \right) \cdot \left| \frac{d(\tilde{\gamma})}{dt} \right|$$

此时 $C_{Lx} = 2.4$, $C_{m\alpha} = 2.93$, $k_t^{-2} = 0.54$, $l = 0.155 \text{ 米}$, $V = 897 \text{ m/s}$

所以:

$$A_{JD} = \frac{2.4 \times 0.155 \times 4\pi \times 57.3}{0.54 \times 2.93 \times 897} = 0.1853^\circ$$

$$(A_{JD})_{\text{地面}} = A_{JD} / \cos \theta_{v0} = 0.27^\circ$$

实际刚体 6D 结果为 ($t=4$ 秒)

$$A_{JD} = 0.38^\circ$$

已知射程为 $R = 2865 \text{ 米}$, 则估算的射偏变化为: $\Delta D = \pm A_{JD} \cdot R / 57.3 = \pm 190 (\text{米})$

实际刚体 6D 计算结果为: $\Delta D = \pm 195 \text{ 米}$. 可见

一旦能准确确定气动突跳就能较准确地确定气动突跳对弹道计算结果的影响。但是，这里由于扰动引起的攻角运动较大(15°)，所以气动突跳的理论估计值(0.27°)与实际刚体6D估计值(0.38°)仍有差别。不过，当扰动不太大时，本文所得的气动突跳公式仍是有参考作用的。

装
订
线

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

§3.3 $\tilde{K}_{10}, \tilde{K}_{20}$ 换算公式及分析

在前一章中介绍了 SRC LOBS^[3.4] 中使用 $\tilde{K}_{10}, \tilde{K}_{20}$ 来计算初速扰动引起的平均攻角阻力对弹道的影响，从而改善了弹道射程的计算准确度。气动突跳实质上是飞行方向的改变，它是与速度垂直的分量的积分效应，而 LOBS 中使用 $\tilde{K}_{10}, \tilde{K}_{20}$ 可以说是运动方向变化的积分效应，即对阻力的影响。本节主要给出 $\tilde{K}_{10}, \tilde{K}_{20}$ 与 $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1$ 的关系，并从快慢进动模量的角度来对抗扰动的特性进行分析。

一. $\tilde{K}_{10}, \tilde{K}_{20}$ 与 $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1$ 的换算公式

装

订

线

由式(3.40)，其解可以写成

$$\tilde{\xi} = \sum_{j=1}^2 |\tilde{\xi}_{j0}| \cdot e^{[\lambda_j s + (\phi_{j0} + \phi_j' s) i]} \quad \dots (3.60)$$

其中，

$$\lambda_j + i\phi_j' = \frac{1}{2} [-H + iP \pm (4M + H^2 - P^2 - i \cdot 2P(2H - T))^{1/2}] \quad \dots (3.61)$$

令 \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 为方程(3.40)的特征根，则

$\tilde{z}_1 = \lambda_1 + i\phi_1'$ ，快进动模量特征根

$\tilde{z}_2 = \lambda_2 + i\phi_2'$ ，慢进动模量特征根 $\dots (3.62)$

所以式(3.60)可写成

$$\tilde{\xi} = \tilde{K}_{10} \cdot e^{\tilde{z}_1 s} + \tilde{K}_{20} \cdot e^{\tilde{z}_2 s} \quad \dots (3.63)$$

对上式两边求导得到(对 s)

$$\tilde{\xi}' = \tilde{K}_{10} \cdot \tilde{z}_1 \cdot e^{\tilde{z}_1 s} + \tilde{K}_{20} \cdot \tilde{z}_2 \cdot e^{\tilde{z}_2 s} \quad \dots (3.64)$$

在 $s=0$ 处，有

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}'_0 &= \tilde{K}_{10} \cdot \tilde{z}_1 + \tilde{K}_{20} \cdot \tilde{z}_2 \\ \tilde{\xi}'_0 &= \tilde{K}_{10} + \tilde{K}_{20} \end{aligned} \quad \dots (3.65)$$

若已知 $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}'_0$ ，则：

$$\tilde{K}_{10} = (-\tilde{z}_2 \cdot \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}'_0) / (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2), \quad \tilde{K}_{20} = (\tilde{z}_1 \tilde{\xi}_0 - \tilde{\xi}'_0) / (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) \quad \dots (3.66)$$

其中, \tilde{K}_{10} : 快进运动模量的初值, $\tilde{K}_{10} = |\tilde{K}_{10}| \cdot e^{i\phi_{10}}$

\tilde{K}_{20} : 慢进运动模量的初值, $\tilde{K}_{20} = |\tilde{K}_{20}| \cdot e^{i\phi_{20}}$

对于实际弹簧, $\lambda_j \ll \phi_j$ ($j=1, 2$), 所以

$$\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 \approx i \cdot (\phi_1' - \phi_2')$$

二. 角速度扰动

$\tilde{\xi}_0 = 0$, 由式(3.66)有:

$$\begin{cases} \tilde{K}_{10} = -i \tilde{\xi}_0' / (\phi_1' - \phi_2') \\ \tilde{K}_{20} = i \tilde{\xi}_0' / (\phi_1' - \phi_2') \end{cases} \quad \dots (3.67)$$

此时 $\tilde{K}_{10} = \tilde{K}_{20}$, 这就是说 \tilde{K}_{20} 比 \tilde{K}_{10} 超前 90° 而 \tilde{K}_{10} 比 \tilde{K}_{20} 落后 90° , 见图3.15

装

订

线

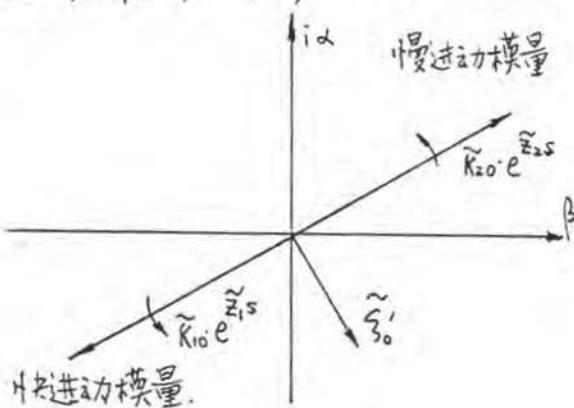


图3.15. 角速度扰动.

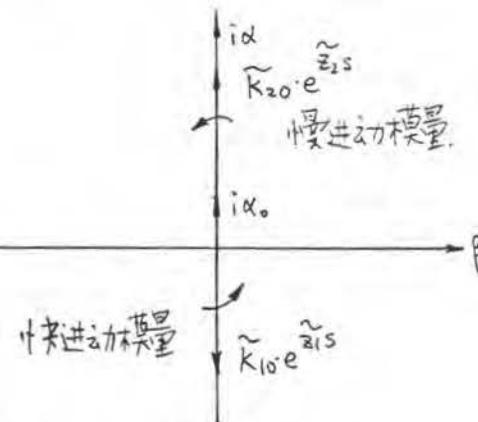


图3.16. 改变角扰动.

由于 $\phi_1' > \phi_2'$, 记 $K_m = (1 - s_g^{-1})^{-1/2}$, $s_g = P^2/4M$, 那么有下面的式子:

$$|\tilde{K}_{10}| = |\tilde{K}_{20}| = \left(\frac{K_m}{P}\right) \cdot \left(\frac{l}{v}\right) \cdot |\tilde{\xi}_0| = \frac{I_y}{I_x} \cdot \frac{K_m}{P} \cdot |\tilde{\xi}_0| \quad \dots (3.68)$$

此时最大改角 $\alpha_{max} = 2 \cdot |\tilde{K}_{10}|$ 考虑到上边框的限制, 也证明了上述结论 $\dots (3.69)$

三. 改变角扰动 注意到 $\alpha_{max} \approx 15^\circ$

此时 $\tilde{\xi}_0' = 0$, 由式(3.66)有:

(2) 改变角扰动

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{10} &= -\tilde{\zeta}_2 \cdot \tilde{\xi}_0 / (\tilde{\zeta}_1 - \tilde{\zeta}_2) = -\phi'_2 \cdot \tilde{\xi}_0 / (\phi'_1 - \phi'_2) \\ \tilde{k}_{20} &= \tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\xi}_0 / (\tilde{\zeta}_1 - \tilde{\zeta}_2) = \phi'_1 \cdot \tilde{\xi}_0 / (\phi'_1 - \phi'_2) \end{aligned} \quad \text{---(3.70)}$$

可见 \tilde{k}_{10} 与 \tilde{k}_{20} 方向相反, \tilde{k}_{10} 与 $\tilde{\xi}_0$ 方向相反,
 \tilde{k}_{20} 与 $\tilde{\xi}_0$ 方向相同, 见图 3.16 ($\tilde{\xi}_0 = i\alpha_0$)。同样,
可以得到下面的换算公式:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{20} &= \frac{1}{2} \cdot (k_m + 1) \cdot \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{k}_{10} &= -\frac{1}{2} \cdot (k_m - 1) \cdot \tilde{\xi}_0 \end{aligned} \quad \text{---(3.71)}$$

最大议角 $\alpha_{max} = k_m \cdot |\tilde{\xi}_0| \quad \text{---(3.72)}$

可见, 议角扰动下, 快频分量比慢频分量要小。

装
订
线

四. 数值举例

使用与上节相同的计算条件, 即 $V_0 = 897 \text{ m/s}$,
 $\Delta E = 45^\circ$, $\beta_0 = 1818 \text{ rad/s}$, $I_x = 496.2 \text{ lbm} \cdot \text{in}^2$, $I_y = 6789.5 \text{ lbm} \cdot \text{in}^2$
 $k_m = 1.388$.

(1) 角速度扰动

$$\begin{aligned} \text{取 } |\dot{\tilde{\xi}}_0| &= 2 \text{ 转/秒}, \omega_0 = \beta_0 = 0 \\ \therefore k_{10} = k_{20} &= \frac{I_y}{I_x} \cdot k_m \cdot \frac{|\dot{\tilde{\xi}}_0|}{\rho} \\ &= \frac{6789.5}{496.2} \times 1.388 \times \frac{4\pi}{1818} \times 57.3 = 7.52^\circ \end{aligned}$$

现以 $\dot{\beta}_0 = 4\pi \text{ rad/s}$ 运行刚体 6D 程序 LOB6, 以 $k_{10} = k_{20} = 7.52^\circ$
运行 LOB456 ($ISG = 2$) 对比 $(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$, k_1 , k_2 及 α_T , 是
图 3.17, 证实了 LOB6 所用 k_{10}, k_{20} 是取议角扰动
过程的平均效应, 也证明了上述换算公式的
正确性。并注意到 $\alpha_{max} \approx 15^\circ$.

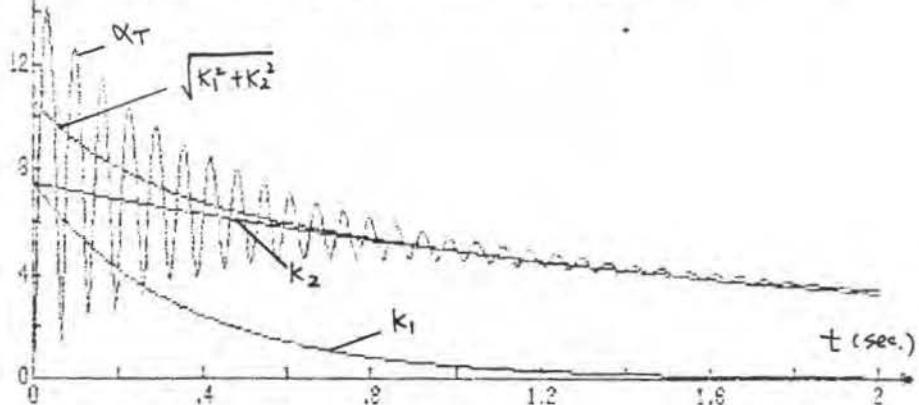
(2) 议角扰动

$\tilde{\beta}_0' = 0, \beta_0 = 0, \alpha_0 = 10^\circ$, 其余条件仍同上。此时
 $\tilde{K}_{10} = -\frac{1}{2}(K_m - 1) \cdot i \alpha_0 = -1.94^\circ i$
 $\tilde{K}_{20} = +\frac{1}{2}(K_m + 1) \cdot i \alpha_0 = 11.94^\circ i$

以 $\alpha_0 = 10^\circ$ 行 LOB6, 以 $K_{10} = -1.94^\circ$, $K_{20} = 11.94^\circ$ 行 LOB56.
 $(1SG=2)$, 求 $K_1^2 + K_2^2$ 及 α_T^2 的对比曲线。见本部
 第二章 §2.2 图 3.9, 同样证实了本文换算
 公式的有效性。注意到 $\alpha_{max} = K_m \cdot |\tilde{\beta}_0'| = 1.338 \times 10^\circ = 13.38^\circ$,
 $(\alpha_{max}^2 = 169.5 \text{ 度}^2)$, 即最大仅用 α_{max} , 正好是改用
 扰动值的 K_m 倍, 所以 [3.3], [3.10] 就是当 K_m 为
 放大因子。

装
订
线

Fig. 3.17 Alpha Total & Squrt($K_1^2+K_2^2$) . K_1' , K_2 comparison
 $(K_{10}=K_{20}=7.52 \text{ deg. } V_0=397 \text{ m./s. } \theta=45 \text{ deg.})$



用，如
 作用。
 也得到相
 对，诸如 雷丁 震动能
 它们都随弹性一起

§3.4. 动不平衡的影响

动不平衡主要是由于弹的质心分布不均匀造成的。此时弹体惯性主轴的方向将与几何主轴不一致，二者之间存在一个夹角 β_D ，在BCS内写成

$$\tilde{\beta}_D = \beta_{D_1} + i\beta_{D_2}$$

其中, β_{D_1} : 惯性主轴在 x_0y_0 平面内的投影与 $0x_b$ 的夹角

β_{D_2} : 惯性主轴与 x_0y_0 平面的夹角。

令 I_{xy}, I_{xz} 定义在BCS中，并记 $\tilde{I}_D = I_{xy} + iI_{xz}$ ，则由[3.2]知，

$$\tilde{\beta}_D = \tilde{I}_D / (I_y - I_x) \quad \dots (3.73)$$

参考式(3.20)以及本文第二部分6D模型推导的式(2.11)，则动不平衡的加入相当于在复议角运动方程右边添加了与弹体角有关的非齐次项，式(3.26)应写为

$$\ddot{\varphi} + (H - iP)\dot{\varphi} - (M + iP\Gamma)\varphi = \tilde{D}_0 \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 + \frac{1}{I_y} (\dot{\varphi}^2 - \dot{\vartheta}^2) e^{i\vartheta} \cdot \tilde{I}_D \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 \dots (3.74)$$

其中, $\vartheta = d\vartheta/dt$, 为弹转速。

根据振动力学理论，当干扰力矩的频率远大于弹的固有摆动频率时，干扰力矩引起的扰动运动基本上表现为自由运动而强迫运动可以忽略。因此，高频率干扰力矩的作用，就可以看成是某一初始摆动角速度的作用。徐明友在[3.2]中利用格林函数的原理，也得到相同的结论。凡是与弹体有关的扰动，诸如推力偏心矩、动不平衡惯性力矩，它们都随弹体一起高速旋转，都可以被一

起始角速度扰动来等效。动不平衡惯性力矩的等效初始角速度扰动公式为 [3.2]

$$\tilde{\beta}_0 = \left(\frac{l}{V}\right) \cdot \frac{1}{\rho_0} \cdot (1 + \lambda_d) \cdot (\dot{\rho}_0^2 - \dot{\rho}^2) \cdot i \tilde{I_D} / I_y \quad --(3.75)$$

其中, $\lambda_d = \frac{[(S_g + 1)^{1/2} - S_g^{1/2}] \cdot [C_{mgd} \cdot (\rho s l / 2V)]^{1/2}}{(\rho / V)}$ --(3.76)

通常 $\dot{\rho}_0 \gg \dot{\rho}$, $\lambda_d \ll 1$, 所以近似地

$$\tilde{\beta}'_0 = \left(\frac{l}{V}\right) \cdot \dot{\rho}_0 \cdot \frac{i \tilde{I_D}}{I_y} = \frac{2\pi}{T_w} \cdot \frac{i \tilde{I_D}}{I_y} \quad --(3.77)$$

或者, $\tilde{\beta}'_0 = \frac{2\pi}{T_w} \cdot \left(1 - \frac{I_x}{I_y}\right) \cdot i \tilde{\beta}_D$ --(3.78)

其中, T_w 为炮管缠度, (turn/cal.)⁻¹

利用刚体 6D 计算来进行仿真证实。仍使用 SRC 155mm. ERF3 MK10, MOD2 弹, $V_0 = 897 \text{ m/s}$, $QE = 45^\circ$, 此时,

$$\dot{\rho}_0 = 1818 \text{ rad/s}, I_x = 0.1452 \times 10^6 \text{ kg mm}^2, T_w = 20 \text{ (cal./转)}$$

$$I_y = 1.9869 \times 10^6 \text{ kg mm}^2. \text{ 假设 } \tilde{I_D} = 4 \times 10^3 \text{ kg mm}^2 \quad (I_{xy})$$

所以,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}'_0 &= \left(\frac{V}{l}\right) \cdot \tilde{\beta}'_0 = i \dot{\alpha}_0 + \dot{\beta}_0 \\ &= \dot{\rho}_0 \cdot \frac{i \tilde{I_D}}{I_y} = 1818 \times \frac{i \cdot 4 \times 10^3}{1986.9 \times 10^3} = 3.66 i \quad (\text{rad/sec.}) \end{aligned}$$

$$B_p \dot{\alpha}_0 = 3.66 \text{ rad/s.} = 0.5825 \text{ (转/秒)}$$

考虑 $I_{xy} = 4000 \text{ kg mm}^2$ 以及 $\dot{\beta}_0 = 0.5825 \text{ 转/秒}$ 两次运行 LOB6, 对比包含气动突跳的 y_v , 见图 3.18, 图 3.19, 可见上述的结论是正确的, 式(3.75)是可用的。

这样, 一旦知道动不平衡值 $\tilde{I_D}$, 就可以折合成等效的初始角速度扰动值 $\tilde{\beta}'_0$. 并

由 $\tilde{\psi}_0$ 利用本章所介绍的气动突跳的模型来估运动不平衡因素对弹道的影响。

同样，假设其它与弹体有关的扰动量已知，在式(3.75)中对应的非齐次项为 $\tilde{D}e^{j\omega t}$ ，那么，它对弹道的影响可以这样来得到：首先将这个扰动化成等效的角速度扰动：

$$\tilde{\psi}_0 = \left(\frac{I}{M}\right) \cdot \frac{1}{R} \cdot (1 + \alpha_d) \cdot j \tilde{D} \quad \cdots (3.79)$$

然后由 $\tilde{\psi}_0$ 结合本部分§3.2 式(3.53)、式(3.54)来得到气动突跳的理论估计值 \tilde{A}_T ，从而了解些扰动的影响。

Fig.3.18 $\tilde{\psi}_0 - t$. [Dynamic imbalance effect. $I_{xy}=4000 \text{ kg.m}^2$]

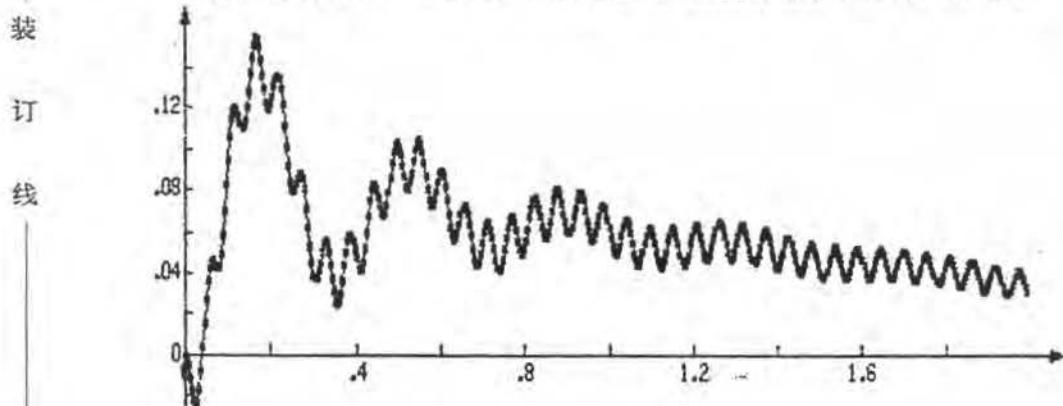
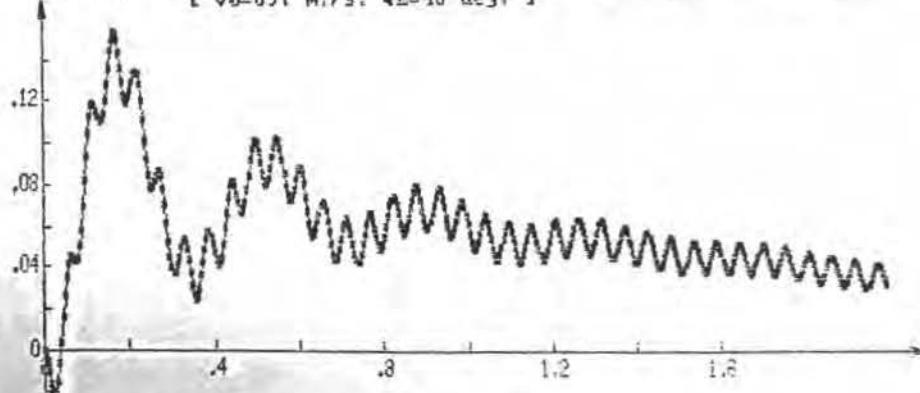


Fig.3.19 Velocity yaw angle (deg.) - t. [$q\theta = 0.5825 \text{ turn/s.}$, $V_0 = 897 \text{ m/s.}$, $Q_E = 45^\circ$]



北京工业学院研究生院毕业论文用纸

第一部分参考文献.

- [1.1]. 林瑞雄，张鸿端编，导弹飞行力学，
(上、下册)，北京工业学院教材，1984年3月。
- [1.2]. P. 加涅尔，华克强、丁放译，导弹控
制系统，国防工业出版社，1985年。
- [1.3]. Chen, Yang-Quan (陈阳泉), Program GM6 — A
six degree of freedom guided missile program, SRC-CP-87680
Oct, 1987.
- [1.4] Chen, Yang-Quan , A trajectory feasibility study of gun-
Launched anti-aircraft guided missile (With a test
study for U.S. gun-launched anti-tank projectile
Copperhead) , SRC-TM-87689 , Oct, 1987.
- 装
订
线
- [1.5]. D.Lyster , Program LOB , SRC-R-104
- [1.6]. Murphy, C.H. , Bull, G.V. Review of the high altitude
research program (CHARP) , BRL Memo Report 1327 ,
July 1966 , (AD645284)
- [1.7]. Bull, G.V. and Murphy . C.H. , Gun Launched Missiles
for Upper Atmosphere Research , AIAA Preprint 64-18
Jan, 1964.
- [1.8]. Data Reduction
Coefficients, T.
[1.9]. Hypervelocity Research in the
Ranges - Gobalistic Building
of Test Data , 1973 Mar
- [1.10]. D. Lyster , Program LOB

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

第二部分 参考文献:

装
订
线

- [2.1] Chapman, G.T. and Kirk, D.B., A method for extracting Aerodynamic coefficients from free-flight data, AIAA Journal, Vol. 8, No 4, April, 1970
- [2.2] A.D. Slack, Ballistic Range Testing, SRC-EB00-L-85084 Oct, 1985
- [2.3] D. Lyster, In flight data analysis, SRC-EB00-L-85135
- [2.4] Zai-Kang, Qi (祁载康) Point-mass, Multi-spline fitting Programs to Determine Aerodynamic Drag coefficient from Radar Measured Velocity Data, SRC-CP00-R-86511
- [2.5] 刘中淳, 火箭导弹和炮弹弹道仿真软件的开发和靶场雷达数据处理, 北京工业大学硕士学位论文, 1987年4月
- [2.6] Hathaway, W.H. Whyte, R. Aeroballistic Research Facility Free-flight Data Analysis Using the Maximum Likelihood Method. AFATL TR-99-98, Dec, 1979
- [2.7] Supersonic Aeroballistic Range Tests of A 27 l/d finned Projectile. A.D. Dupuis, 9th International Symposium on Ballistics.
- [2.8] Program 'YC', Data Reduction of Free Flight Measurements of Aerodynamic Coefficients, June, 1971, SRC-R-50
- [2.9] Hypervelocity Research in the C.A.R.D.E Free Flight Ranges . Galbraith Building Opening Ceremonies, University of Toronto Press, 7-Mar-1961, G.V. Bull.
- [2.10] D. Lyster, Program 'LOB', SRC-R-104.

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

第三部分参考文献:

- [3.1] 林瑞雄, 张鸿端编. 弹道飞行力学(下)
北京工业大学教材, 1984年3月.
- [3.2] 徐明友编著, 火箭弹道学, 国防工
业出版社, 1979.
- [3.3] D.Lyster, Program 'LOB', SRC-R-104
- [3.4] D.Lyster, Program 'LOBS', SRC-R-109
- [3.5] Lieske, Equation of Motion for a Modified Point
Mass Trajectory, BRL Report No 1314, Mar. 1966
- [3.6] C.H. Murphy, Free flight motion of symmetric missiles
BRL Report No 1216, July, 1963
- 装
订
线 [3.7] Qi, Zai-Kang (祁载康) and Chen, Yang-Quan (陈阳泉),
A six degree of freedom projectile model and program LOB6,
SRC-TM-87678, Sept, 1987
- [3.8] Qi, Zai-Kang and Chen, Yang-Quan, A 5D model
for calculating high elevation projectile trajectories and an
accurate 4D model, SRC - TM - 87677, Sept, 1987
- [3.9] Qi, Zai-Kang and Chen, Yang-Quan, Initial disturbance
and dynamic imbalance effects on projectile trajectory,
SRC-TM-87679, Oct, 1987
- [3.10] Qi, Zai-Kang and D. Lyster, A fast algorithm
for solving Lieske's yaw of repose equation, SRC-TM-87676,
Sept, 1987.
- [3.11] D. Lyster, Lecture on Modified Point Mass Trajectory
Analysis, SRC-EC00-L-85137, Oct, 1985
- [3.12] C. H. Murphy, Gravity - Induced Angular motion

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

of a spinning missile , Journal of Spacecraft and Rocket
Vol. 8, No. 8 , Aug. 1971.

[3.13]. 刘中淳, 炮射导弹和炮弹弹道仿真软
件的开发. 鞍山雷达数据处理. 北京工业
学院硕士论文, 1987年4月.

装

订

线

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

附录 I.

SRC 155 mm. ERFB

MK10. MOD2 4+4生

说明：

重量：磅 (lbm.)

长度：英吋 (in.)

转动惯量：

磅·英吋²
(lbm·in.²)

```

KDIM 1GG 1PROP JI ENE EC DT
3 9 2 2 0 -1. .002
PROJECTILE DESCRIPTION : 155 MM ERFB MK10 MOD 2
MASS DIA. CDK CDK1 CLK CY KR XCG0 X10 TRIO
100.4 6.102 1. 1. 1. 1. 2 23.74 495.2 6799.5
TWIST DGUNO
20. 6.102
AERODYNAMIC DESCRI. # 155 MM ERFB MK10 MOD 2 (FCI 155-SFS-6)
IFORM IFIN NODEF.
0 1 9
NUMBER OF POLYNOMIALS FOR NODEF. COEFFICIENTS ( MAX. 6 )
6 4 3 3 2 1 3 1 1
AERODYNAMIC COEFFICIENT CODE FOR NODEF. COEFFICIENTS
1 2 3 4 5 6 7 8 10
M1 RM C0 * (M^0) C1 * (M^1) C2 * (M^2) C3 * (M^3)
ZERO LIFT DRAG COEFFICIENT (CDD0)
1 .75 ,16000000E+0
2 .85 ,33142850E-0 -.47472110E0 ,32818780E0
4 .975 -.53465750E+1 ,13314520E2 -.24457440E2 ,10000120E2
4 1.15 -.14e07310E+2 ,37792210E2 -.51969580E2 ,80154850E1
4 1.475 -.33485440E+0 ,13312740E1 -.87378110E0 ,17715810E0
4 3.0 ,45200150E-0 -.14068570E0 ,22001770E-1 -.10335560E-1
DRAG DUE TO ANGLE OF ATTACK (CDRA)
1 .85 ,24300000E1
4 1.05 ,24889450E1 -.84499140E2 ,37169750E1 -.14716190E1
3 1.50 -.22307910E1 ,57831970E1 ,15150120E1
3 3.00 ,45639590E1 ,63756310E0 ,167771730E0
LIFT FORCE COEFFICIENT (LINEAR) (CL4)
1 .59 ,19529893E1
4 1.1 ,20786210E1 -.39619550E0 ,20068200E0 -.1544713E0
3 3.0 ,12568410E1 ,7728510E0 -.10784930E0
LIFT FORCE COEFFICIENT (CUBIC) (CL4C)
1 .59 ,64200000E1
4 1.0 ,30586500E2 -.98446260E2 ,12556790E1 -.67336010E2
3 3.0 ,81522370E0 ,10462580E2 -.11520150E1
OVERTURNING MOMENT COEFFICIENT (LINEAR) (CM4)
1 .6 ,39240000E1
4 3.0 ,16397110E1 -.16554690E1 ,35575130E0 -.11099150E0
MAGNUS FORCE COEFFICIENT (CMY4)
1 3.0 -2.5
ROLL MOMENT COEFFICIENT (CLP1)
1 .75 ,74000000E-1
4 1.25 -.46412910E-1 ,88950280E-1 ,90636770E-1 -.20142560E-1
4 3.0 ,27838890E-1 ,19646860E-1 -.57295110E-2 ,67590760E-7
MAGNUS MOMENT COEFFICIENT (CMY4)
1 3.0 2.59
DAMPING MOMENT COEFFICIENT
1 3.0 ,42000000E+2
DELTA CLDEL CMY0 CMY0
.1745 ,04 1.43 0.

```

北京工业学院研究生院毕业论文用纸

附录 II.

巴黎大炮特性.

说明:

重量: 公斤 (kg.)

长度: 士米 (mm.)

转动惯量:

公斤·士米²

(kg·mm²)

210mm PARIS GUN PROJECTILE

UNITS ARE : METRIC

PHYSICAL PROPERTIES

WEIGHT	106.00	CENTER OF GRAVITY	052.10
DIAMETER	216.00	I _{XX}	.72779E+05
		I _{YY}	.50164E+07
KCD	.91050	KCL	1.0000
KCDI	1.0000	KY	1.0000

DEFAULT GUN PARAMETERS

TWIST 40.71

GUN DIAMETER 210.000

AERO INPUT FOR 210mm PROJECTILE (Dmax = 216mm)

**** CGO ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
.341	.292	.256	.226	.202	.185	.167

**** CNA ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
2.890	2.653	2.882	2.834	2.822	2.702	2.575

**** YCP ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
1.955	2.055	2.081	2.085	2.077	2.064	2.052

**** CLP ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
-0.016	-0.015	-0.014	-0.013	-0.012	-0.011	-0.010

**** CDA ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
5.900	5.950	5.760	5.440	5.020	4.700	4.300

**** CMQA ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
-5.120	-8.120	-8.120	-8.120	-8.120	-8.120	-8.120

**** CYPA ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
-0.101	-0.068	-0.078	-0.072	-0.066	-0.062	-0.055

**** CMRA ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
.021	.018	.016	.015	.014	.017	.011

**** CLA3 ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
15.000	17.200	17.000	15.500	14.800	14.100	13.400

**** CMAT3 ****

1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	5.000
8.000	9.000	10.500	11.000	10.700	10.500	9.50

