DOI:10.15892/j.cnki.djzdxb.1990.03.001



# 旋转稳定弹弹道计算模型及软件研究(一)

## ——模型自动切换式旋转稳定弹弹道计算方法

陈 阳 泉

〔摘要〕阐述了旋转稳定弹弹道计算的模型自动切换方法，它使得扰动弹道计算速度比单纯使用刚体六自由度模型的计算速度快很多倍并保持相同的计算精度。

〔叙词〕　旋转稳定弹药　外弹道计算　扰动　变换

本文是“旋转稳定弹弹道计算模型及软件研究”系列论文中的第一篇。该系列论文共包括三篇论文，其余两篇论文的题目是：

- 《旋转稳定弹弹道计算模型的简化研究》
- 《一个新的无控旋转弹弹道计算的刚体六自由度模型》

## 前　言

在旋转稳定弹外弹道的计算中，计算的经费和精度常常是一个大家都很关注的问题。精确的弹道模型例如刚体六自由度模型（R6D），由于太费时而在实际上很少得到应用。往往寻求省时而精度合乎实际需要的简化模型和计算方法。这便提出了弹道计算的模型与方法的研究问题。

祁载康和作者在〔1〕～〔4〕中提出了刚体六自由度模型（R6D）、简化六自由度模型（6D）、修正简化六自由度模型（$6D_m$）、五自由度模型（5D)、修正五自由度模型($5D_m$)以及快速四自由度模型（4D）（下文中的4D均指快度四自由度模型）。大量的计算实践表明，对无控旋转稳定弹的名义弹道计算，在计算时间上4D比LOBS[5],[6]快40%，$5D_m$比R6D快110倍以上，6D、$6D_m$、R6D相当，5D与$5D_m$相当。在计算精度方面，当全弹道上的攻角运动幅值较小（2°～5°）时，上述各模型的射程和侧偏的结果都较接近；以R6D的结果为考核标准，5D与$5D_m$结果相同且与6D、$6D_m$相同，但比4D结果稍好。当全弹道上的攻角运动幅值较大时（如长射程高射角弹道），$5D_m$远比4D更接近R6D的结果。由于$5D_m$中采取自适应积分步长的方法，$5D_m$的计算时间仅比4D慢4～6倍，因此可以说，无论是在计算速度上还是在计算精度上，$5D_m$已经在4D和R6D之间作了最好的折衷。

然而，对于扰动弹道只有用R6D模型才是适当的，这是因为：

(1) 4D采用攻角过程的稳态解来代替攻角过程，显然不适用计算扰动弹道。尽管可以（如LOBS）采用〔7〕建议的$K_{10}$、$K_{20}$来代替等效初始扰动，但仍是基于攻角运动的平均效应，虽可以更好地预测射程但射偏的预测是不能接受的。

(2) $5D_m$虽然修正了5D中的投影关系使得名义弹道预测结果更接近R6D，但$5D_m$、5D

均是将复攻角微分方程中的快频特征根舍去由慢频特征根（主导特征根）重组成一阶复攻角微分方程并保证攻角运动稳态解不变来描述攻角过程的。这对于旋转稳定弹的名义弹道计算是完全可行的，因为此时攻角运动的快频分量远比慢频分量要小；但对扰动弹道计算是不适当的，因攻角快频分量在扰动开始阶段是显著的，对弹道影响较大。

(3) 6D、$6D_m$是R6D的近似模型，它们没有通过对弹体姿态的计算来描述攻角过程，而是直接近似地使用复攻角二阶微分方程来描述。由于它们与R6D的计算时间相当而计算精度比R6D差，自然不会用于扰动弹道的计算，可是，6D、$6D_m$的形式比较简单，方便于一些气动系数辨识研究上[1]。

表1给出了一扰动弹道使用多种模型分别计算的结果比较。

**表 1 不同计算方案比较**

| 计算方案 | 射程（米） | 射偏（米） | CPU时间（秒） |
|---|---|---|---|
| R6D | 29237 | 1318.5 | 8383 |
| $6D_m$ | 29226 | 1321.7 | 6810 |
| $5D_m$ | 29418 | 1235.0 | 73 |
| 4D* | 29218 | 981.6 | 53 |
| $6D_m$-$5D_m$ | 29226 | 1320.3 | 805 |
| $6D_m$-4D | 29228 | 1327.5 | 778 |
| R6D-$5D_m$ | 29237 | 1319 | 873 |
| R6D-4D | 29241 | 1325 | 856 |

计算条件：155mm，ERFB MK10 MOD2，$V_0=897m/s$

$\theta_E=45°$，$\alpha_0=10°$，IBM/PC-XT+8087

*注：对应$\alpha_0=10°$，$K_{10}=-1.94°$，$K_{20}=11.94°$，此刻$K_m=1.38$

参见〔1〕、〔4〕.

## 1 模型切换式弹道计算的原理

为了解决旋转稳定弹弹道计算时间与计算精度的矛盾，本文提出了模型切换式弹道计算的方法。它能使扰动弹道的计算速度比单纯使用R6D要快很多倍并且保持与R6D相同的计精度。

所谓模型切换式弹道计算，即指在一定条件满足时由一种弹道模型换用另一种弹道模型进行弹道计算。众所周知，对于稳定飞行器，扰动的影响会衰减。对于旋转稳定弹，初始扰动过渡过程会很快衰减。设衰减结束时刻为$t_e$，不妨将此时刻看成初始时刻，那么以后的弹道可以看成无扰动的名义弹道。这样，在$t_e$时刻之前采用较精确的弹道模型如R6D、$6D_m$而在$t_e$之后采用简化的弹道模型如4D、5D或$5D_m$，显然是可行的。〔1〕中已经提出了模型切

换式弹道计算的思想，但它是由用户给定模型切换时间 $t_{sw}$ 的方法。显然，一个不需用户干预的自动模型切换方法，才是人们希求的理想方法。

## 2 自动模型切换方法

模型自动切换的关键是判定扰动引起的攻角运动衰减到允许值的时间即切换时间。图1是一扰动弹道的全弹道侧滑角过程，由此易想一个简单的办法是不断比较全攻角$\alpha_T$的峰值与

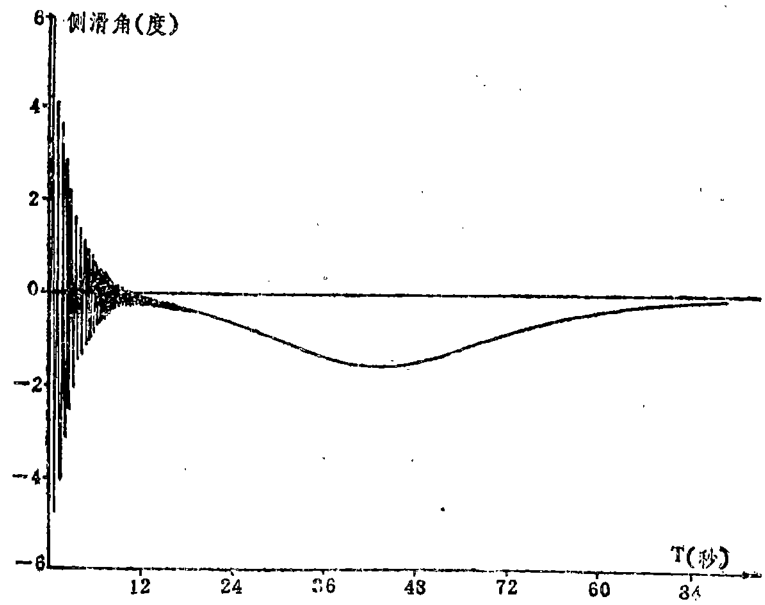



图 1　全弹道上的扰动侧滑角过程（R6D结果）

谷值之差是否小于一给定小量ε（如0.005度）。当此差值小于 ε 时进行模型切换，之后不再作这种比较，峰值与谷值的获取可以通过比较当前 $\alpha_T$ 与前一步及前两步积分时的 $\alpha_T$三者之间的关系来实现；或者使用三点插值来较准确地得到$\alpha_T$的峰、谷值。当攻角过渡过程接近结束时，由于其峰、谷值较小，确定峰、谷值的误差所占的比例增大，即峰谷值的有效数位减小，加之峰、谷值较接近，所以峰、谷值的差值的有效数位成了问题；此外，每次确定峰、谷值时的误差不同，它们差值还可能波动，即不总出现理论上的单调减小。这样，这种方法不能可靠地判定攻角过渡过程的结束时刻。

另一个办法是通过判断全攻角的峰值是否持续增加来决定扰动过渡过程是否结束。也可以通过比较若干点（如100点）仍没有新的峰值来决定过渡过程是否结束。实践表明这比前述方法可靠，但不及下面介绍的方法。

刚体六自由度模型的计算代价主要是在于需要准确描述攻角的快频运动。只要这种快频过程结束就可以进行 R6D-5$D_m$ 模型切换（当切换时刻攻角较小且全弹道的顶点附近的攻角较小时，可以进行R6D-4D模型切换）。由文献［7］，攻角快频运动模态的幅值$K_2$的公式为

$$K_2 = K_{20}\left(\frac{p_0/V_0}{K_{m0}}\Big/\frac{P/V}{K_m}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{I_2} \quad (1)$$

其中，

$$\frac{dI_2}{dt} = -\frac{V}{l}\cdot\frac{H}{2}\left[1+K_m(S_d-1)\right]+\frac{K_m}{2}\left(\frac{\dot{p}}{p}-\frac{\dot{V}}{V}\right) \quad (2)$$

（$I_2$的初值为0）

$K_m=(1-S_g^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ 为放大因子 （3）

$S_g=P^2/4M$ 为陀螺稳定因子 （4）

$S_d=2T/H$ 为动态稳定因子 （5）

$$\dot{V}=\left(-\frac{1}{2}\rho V^2 SC_D - mg\sin\theta_v\right)\Big/m \quad (6)$$

$K_{20}$为快频运动模态初始幅值

$p_0$、$V_0$为弹的初始转速和初始速度

p、V为弹的转速和速度

$$\begin{cases} P = \dfrac{I_x}{I_y}\cdot\dfrac{pl}{2V} \\ M = \dfrac{\rho Sl}{2m}K_t^{-2}C_{m\alpha} \\ T = \dfrac{\rho Sl}{2m}\left(C_{L\alpha}+\dfrac{1}{2}K_a^{-2}C_{mp\alpha}\right) \\ H = \dfrac{\rho Sl}{2m}\left(C_{L\alpha}-C_D-\dfrac{1}{2}K_t^{-2}C_{mq\alpha}\right) \end{cases} \quad (7)$$

$$K_a=(I_x/ml^2)^{\frac{1}{2}},\qquad K_t=(I_y/ml^2)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

ρ 为空气密度

m 为弹丸质量

S、$l$ 为弹丸参考面积和参考长度

$I_x$，$I_y$ 为弹的轴向与横向转动惯量

$C_D=C_{d0}+C_{d\alpha}\cdot\alpha_T^2$ 为弹的全阻力

$C_{L\alpha}$ 为线性升力系数

$C_{mp\alpha}$为马格努斯力矩系数

$C_{mq\alpha}$ 为俯仰阻尼力矩系数

所以，通过（1）式、（2）式可以了解攻角快频运动幅值的衰减。当$|K_2|$小于某一给定ε时就可以认为快频分量衰减结束并进行模型切换。要指出的是，由于R6D积分步长较小，（2）式不必与弹道共同积分而仅使用一般的Euler法就行了。

攻角的扰动运动可近似为[1]

$$\tilde{\xi} = \tilde{K}_{10} e^{\tilde{Z}_1 S} + \tilde{K}_{20} e^{\tilde{Z}_2 S} \tag{9}$$

其中，s 为弹道弧长，$\tilde{Z}_2$、$\tilde{Z}_1$为快慢运动特征根。

$$\tilde{Z}_j = \lambda_j + i\phi_j' = \frac{1}{2}\left[-H + iP \pm (4M + H^2 - P^2 - i \cdot 2P(2H - T))^{\frac{1}{2}}\right] \tag{10}$$

$j = 1,\ 2$

$\tilde{\xi} = i\alpha + \beta$ 为复攻角

所以，$\tilde{\xi}_0$，$\tilde{\xi}_0'$与$\tilde{K}_{10}$，$\tilde{K}_2$ 的转换关系为

$$\tilde{K}_{10} = (\tilde{Z}_2\tilde{\xi}_0 - \tilde{\xi}_0') \Big/ (\tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_1) \tag{11}$$

$$\tilde{K}_{20} = (\tilde{\xi}_0' - \tilde{Z}_1\tilde{\xi}_0) \Big/ (\tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_1) \tag{12}$$

$$(K_{10} = |\tilde{K}_{10}|, \qquad K_{20} = |\tilde{K}_{20}|)$$

由于$\lambda_j \ll \phi_j'$，$\phi_1' < \phi_2'$，因此对于初始攻角扰动

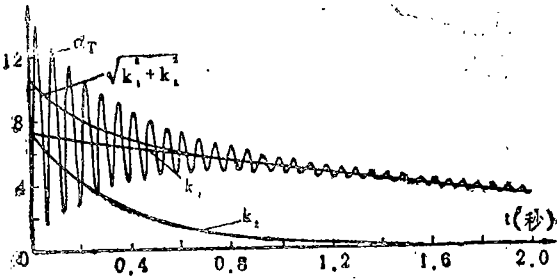
$$|\tilde{K}_{10}| = \frac{1}{2}\left(K_m + 1\right)|\tilde{\xi}_0| \tag{13}$$

$$|\tilde{K}_{20}| = -\frac{1}{2}\left(K_m - 1\right)|\tilde{\xi}_0| \tag{14}$$

对于初始角速度扰动

$$|\tilde{K}_{10}| = |\tilde{K}_{20}| = \frac{I_\gamma}{I_y} \cdot \frac{K_m}{P} |\dot{\tilde{\xi}}_0| \tag{15}$$

至此，（1）中的$K_{20}$的求取可由（14）、（15）式得到，见图2。至于$\tilde{\xi}_0$、$\dot{\tilde{\xi}}_0$与 R6D 初始扰动的换算详见文献［1］。




$K_1$——攻角慢频运动分量（4D结果） $K_2$——攻角快频运动分量（4D结果）

$\sqrt{K_1^2+K_2^2}$——平均攻角运动效应（4D结果） $\alpha_T$——全攻角（R6D结果）

图 2 角速度扰动下攻角过渡过程的比较

这样，在模型切换时刻快频攻角运动分量很小，可以切换成$5D_m$或4D。此时刻的攻角值应作为$5D_m$的攻角初值或换算成4D所需的$K_{10}$、$K_{20}$再继续进行弹道计算。

## 3 程序D456R6

基于自动模型切换式弹道计算的思想和多种弹道模型的研究，作者完成了多功能弹道预测软件 D456R6。它享用了SRC LOBS 的所有优点修正了其错误。D456R6 不仅包含了4D、5D、$5D_m$、6D、$6D_m$、R6D以及$6D_m$-$5D_m$、R6D-$5D_m$、$6D_m$-4D、R6D-4D 自动模型切换计算方法，而且与LOBS完全向下兼容。所有增强的内容均由原LOBS中的参数ISG来控制（见表2）。学习使用方便灵活。重要的是，不同的弹道模型与弹道计算方法之间真正具有了计算可比性。这是因为弹道积分、大气特性、气动特性等模块都是共用的，不同的仅仅是弹道方程。D456R6还具有都好的自动化图形交互。D456R6是弹道研究的有益工具，其开放性、结构性与可移植性可生长性亦是良好的。目前的版本能在 IBM/PC及VAX系列计算机上运行。

## 4 结　　论

本文提出了旋转稳定弹弹道计算的自动模型切换原理及方法，使得扰动弹道的计算速度比单纯使用 R6D要快数倍以上，并且计算精度与 R6D 相同。本文的工作对于研究弹道的随机响应、散布分析以及气动辨识等都是有用的。

**致谢：**作者感谢祁载康教授的有力指导，本文的部分工作得到过 SRC 的资助，在模型切换技术上与杨志远高级工程师进行过有效的讨论。

表 2　　D456R6模型使用选择表

| LOBS ISG | 模　型　选　用 |
|---|---|
| 0 | 4D |
| 1 | 4D（计算并输出$S_g$） |
| 2 | 4D（考虑扰动攻角阻力，$K_{10}$、$K_{20}$） |
| 3 | $5D$-$5D_m$ 切换 |
| 4 | 同2，但使用$5D_m$ |
| 5 | $6D$-$6D_m$ 切换 |
| 6 | 5D |
| 7 | $5D_m$ |
| 8 | 6D |
| 9 | $6D_m$ |
| 10 | $6D_m$-$5D_m$ 切换 |
| 11 | $6D_m$-4D 切换 |
| －1 | R6D |
| －2 | R6D-4D 切换 |
| －3 | R6D-$5D_m$ 切换 |

## 参 考 文 献

〔1〕陈阳泉，《飞行器仿真研究和靶道气动力系数辨识》，北京理工大学硕士研究生论文，1988年4月。

〔2〕Qi, Zai-Kang and Chen, Yang-Quan, A six degree of freedom Projectile model and program LOB6, SRC-TM-87678, sept, 1987.

〔3〕Qi, Zai-Kang and Chen, Yang-Quan, A 5D model for calculating high elevation projectile trajetories and an accurate 4D model, SRC-TM-87677, Sept, 1987.

〔4〕Qi, Zai-Kang and Chen, Yang-Quan, Initial disturbances and dynamic imbalance effects on projectile trajectory, SRC-TM-87679, Oct, 1987.

〔5〕D.Lyster, Program LOBS′, SRC-R-109.

〔6〕Lieske, Equatiou of motion for a modified point mass trajetory, BRL Report No.1314, Mar, 1966.

〔7〕C.H.Murphy, Free flight motion of symmetric missiles, BRL Report No.1216, July, 1963.

DOI:10.15892/j.cnki.djzdxb.1990.04.001



# 旋转稳定弹弹道计算模型及软件研究(二)

## ——旋转稳定弹弹道计算模型简化研究

陈 阳 泉

〔摘要〕提出了旋转稳定弹弹道计算简化模型：简化六自由度模型（6D）、修正简化六自由度模型（$6D_m$）、五自由度模型（5D）、修正五自由度模型（$5D_m$）及快速四自由度模型（4D）。$5D_m$的大攻角名义弹道计算结果远比4D更接近标准刚体六自由度模型的结果。4D比SRC LOBS快40%。$5D_m$是4D与标准刚体六自由度模型之间的一个很好的折衷模型。

〔叙词〕旋转稳定弹药 弹道计算 弹道模型 软件

## 1 引 言

在外弹道研究的不同阶段或不同场合，使用适当的简化弹道模型往往能带来益处。在当前计算技术条件下，弹道计算模型的简化研究仍然是有现实意义的。通常使用的刚体六自由度模型（R6D）[1]，实际上是用一组微分方程准确地描述了一个多变量时变非线性耦合无控系统——旋转稳定弹丸的飞行过程。R6D形式上不利于对弹的运动作适当的理论定性分析。所以，用C.H.Murphy建议的复攻角微分方程[2]近似地描述R6D得到了广泛的接受。本文细心推导了与〔2〕形式相似的复攻角微分方程，包含了比〔2〕更多的内容。由此得到了简化六自由度模型（6D）。这种简化的本质在于对攻角过程的描述的近似。通过对投影关系的修正，得到了修正6D（$6D_m$），它是在6D基础上对R6D攻角过程的二阶近似。

R6D的计算结果准确在于它对攻角运动的准确描述，但由于角运动中快频与慢频的耦合，计算代价很高。4D中的攻角过程以动力平衡角$\vec{\alpha}_e$（yaw of repose）来代替[3]，这实质上是攻角运动的稳态解。4D的计算步长能达到R6D的1/500即4D要比R6D快500倍左右。而且，大量计算实践表明，当全弹道上的最大攻角$\alpha_{T_{max}}$较小时（2°～5°），4D的名义弹道结果（射程、射偏）与R6D的结果非常接近。所以在计算名义弹道方面，4D得到了更广泛的应用。自Lieske[4]提出修正质点弹道的方程以来，关于4D弹道计算软件相继完成。我国从SRC引进的程序LOB[5]、LOBS[6]就是这样的商品软件。LOB中以复攻角微分方程的线性稳态解来描述名义弹道计算中的重力引起的攻角运动过程。LOBS中的复攻角微分方程中考虑了非线性气动力因素，使用较复杂的迭代求取$\vec{\alpha}_e$。计算精度得到改善。1987年，祁载康在SRC分析了Lieske平衡攻角公式中坐标系间的关系，提出了求解Lieske平衡攻角方程的一个快速算法，比SRC LOBS快40%[7]。本文基于平衡攻角是复攻角运动微分方程的稳态解这一基本思想，从6D出发提出了一个新的快速四自由度模型（4D），它考虑了所有可能对$\vec{\alpha}_e$有影响的因素。它与〔7〕、〔6〕的精度相同但亦比〔6〕快40%。

但在较大射高的情况下，由于空气密度的影响使得重力引起的攻角运动幅值增大，此时4D在射程射偏的计算上与R6D相差很大。可以认为这是此时较大的攻角运动不能被4D描述而造成的“系统误差”或“模型误差”。C.H.Murphy在[8]中试图通过某些修补来改善4D的结果但攻角的计算仍然是基于攻角运动的稳态解。可以试图在4D和R6D之间找一个折衷模型，既能改善4D的结果又比R6D显著地快速。这就是本文基于6D、$6D_m$所提出的5D、$5D_m$。

本文是这样安排的：第2部分重新推导了形式与[2]形式相似的6D；第3部分提出对6D的修正方案，形成$6D_m$；第4部分提出了5D及$5D_m$的原理和公式；第5部分是4D的提出。最后是结论，重点指出在计算无扰动弹道（名义弹道）时$5D_m$的优越性。

## 2 简化六自由度模型（6D）

为便于研究，这里不采用R6D[1]而使用与[2]中相似的简化六自由度模型。这是由于在6D中攻角作为状态变量，由复攻角微分方程描述而在R6D中攻角仅是由几何关系方程来决定的，不利于模型简化的研究。

### 2.1 复攻角微分方程

与R6D不同，这里攻角定义见图2.1。定义准速度坐标系（QVCS）及准弹体坐标系（QBCS），它们与地面坐标系（ECS）的关系见图2.3。QVCS中坐标$[X_v, Y_v, Z_v]^T$与ECS中坐标$[X_e, Y_e, Z_e]^T$的转换关系为：

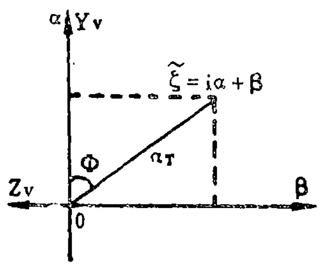



图2.1 攻角定义

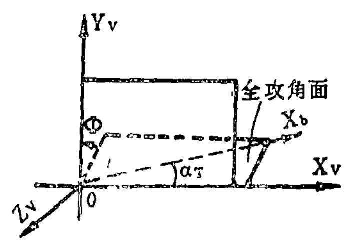



图2.2 全攻角与全攻角面

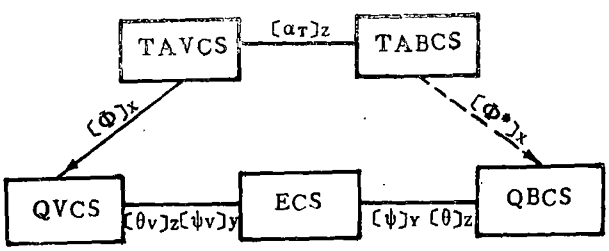



图2.3 坐标系之间的关系

$$[X_v, Y_v, Z_v]^T = L_z(\theta_v) \cdot L_y(\psi_v) \cdot [X_e, Y_e, Z_e]^T \tag{1}$$

$X_vOY_v$为垂直于地面的平面，全攻角$\alpha_T$定义见图2.2。$\alpha_T$总为正，$\Phi$为全攻角平面$X_bOX_v$与$X_vOY_v$的夹角。$X_b$为弹轴，$X_v$正方向为弹速度$\vec{v}$的方向。记 $\tilde{\xi}=i\alpha+\beta$为复攻角，则$\alpha_T=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}=|\tilde{\xi}|$ 又记

$$\begin{cases} \overline{C}_{L\alpha}=C_{L\alpha}+C_{L\alpha^3}\cdot\alpha_T^2, & \overline{C}_{yp\alpha}=C_y{}^*{}_{p\alpha}(pl/2v) \\ \overline{C}_{m\alpha}=C_{m\alpha}+C_{m\alpha^3}\cdot\alpha_T^2, & \overline{C}_{mq\alpha}=C_{mq\alpha}(l/2v) \\ \overline{C}_{mp\alpha}=C_m{}^*{}_{p\alpha}(pl/2v), & \overline{C}_d=C_{d\phi}+C_{d\alpha}\cdot\alpha_T^2 \end{cases} \quad (2)$$

和

$$\begin{cases} a_1=QS\cdot\overline{C}_{L\alpha}/mu, & a_2=QS\cdot\overline{C}_y{}^*{}_{p\alpha}/mu \\ b_1=QSl\cdot\overline{C}_{m\alpha}/I_y, & b_2=QSl\cdot\overline{C}_m{}^*{}_{p\alpha}/I_y \\ b_3=QSl\cdot\overline{C}_{mq\alpha}/I_y, & b_4=I_x\cdot p/I_y \end{cases} \quad (3)$$

由飞行力学原理，弹质心运动的动力学方程为，

$$\begin{cases} d\theta_v/dt=a_1\alpha+a_2\beta-g\cos\theta_v/u \\ d\psi_v/dt=a_1\beta-a_2\alpha \end{cases} \quad (4)$$

记$\omega_y$、$\omega_z$为弹体转动角速度，忽略$\omega_y$ $\omega_z$交叉项得弹绕质心转动的动力学方程

$$\begin{cases} d\omega_z/dt=b_1\alpha+b_2\beta+b_3\omega_z+b_4\omega_y \\ d\omega_y/dt=b_1\beta-b_2\alpha+b_3\omega_y-b_4\omega_z \end{cases} \quad (5)$$

当攻角不过分大时，近似地有

$$\begin{cases} \alpha\doteq\theta-\theta_v \\ \beta\doteq\psi-\psi_v \end{cases} \quad (6)$$

由式(4)、(6)得到

$$\begin{cases} \omega_y=\dot{\beta}+a_1\beta-a_2\alpha \\ \omega_z=\dot{\alpha}+a_2\beta+a_1\alpha-g\cos\theta_v/u \end{cases} \quad (7)$$

式(7)两边对时间t求导并忽略各气动系数以及$g\cos\theta_v/u$项对时间t的导数，显然有

$$\begin{cases} \dot{\omega}_y=\ddot{\beta}-a_2\dot{\alpha}+a_1\dot{\beta} \\ \dot{\omega}_z=\ddot{\alpha}+a_1\dot{\alpha}+a_2\dot{\beta} \end{cases} \quad (8)$$

由式(5)、(7)、(8)并记

$$\begin{cases} A=a_1-b_3, & C=b_1+a_1b_3-a_2b_4 \\ B=b_4-a_2, & D=b_2+a_2b_3+a_1b_4 \end{cases} \quad (9)$$

则有 $$\ddot{\alpha}+A\dot{\alpha}-B\dot{\beta}-C\alpha-D\beta=-b_3g\cos\theta_v/u \quad (10a)$$

$$\ddot{\beta}+A\dot{\beta}+B\dot{\alpha}-C\beta+D\alpha=b_4 g\cos\theta_v/u \tag{10b}$$

由式（10b）+式（10a）· i，得到

$$\ddot{\tilde{\xi}}+(A-iB)\dot{\tilde{\xi}}-(C+iD)\tilde{\xi}=\tilde{D}_g \tag{11}$$

其中，$\tilde{D}_g=(b_4-ib_3)g\cos\theta_v/u$，称为重力驱动项。式（11）为时间域的复攻角运动微分方程。由此不难得到以弹道弧长s为自变量的s-域复攻角运动微分方程。采用〔2〕中的记号

$$\tilde{\xi}''+(H-iP)\tilde{\xi}'-(M+iPT)\tilde{\xi}=\tilde{D}_g\cdot\left(\frac{1}{u^2}\right) \tag{12}$$

其中，

$$\begin{cases} H=\overline{A}/u, & P=B/u \\ M=C/u^2, & PT=D/u^2 \end{cases} \tag{13}$$

$$(\ast)'=d(\ast)/ds,\quad (\dot{\ast})=d(\ast)/dt \quad 则(\dot{\ast})=u\cdot(\ast)'$$

由于　$$(\ast)''=(\ddot{\ast})/u^2-(\ast)'\dot{u}/u \tag{14}$$

所以　$$\overline{A}=(QS/mu)(\overline{C}_{L\alpha}-\overline{C}_d-mg\sin\theta_v/QS)-b_3 \tag{15}$$

可见，（12式）与〔2〕中的形式很相似但要比〔2〕中的公式精度高。主要是多了马格努斯力项、升力与俯仰阻尼力矩交叉项、马格努斯力与陀螺力矩交叉项以及马格努斯力与俯仰阻尼力矩交叉项等。

### 2.2 弹道计算模型

在ECS中建立弹质心运动的动力学方程

$$\dot{\vec{u}}=-\frac{\rho s}{2m}v\cdot\vec{v}\cdot\overline{C}_d+\frac{\rho s}{2m}v^2\overline{C}_{L\alpha}\vec{\alpha}_e-\frac{\rho s}{2m}v\overline{C}_y{}^*{}_{P\alpha}(\vec{\alpha}_e\times\vec{v})$$
$$+\vec{g}+\vec{\Lambda}+\vec{g}''+\vec{F}_t \tag{16}$$

其中，$\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}$，$v=\|\vec{v}\|$；$u=\|\vec{u}\|$

$\overline{C}_y{}^*{}_{P\alpha}=C_{yP\alpha}(pl/2v)+C_{yP\alpha}\cdot\delta$为有效马格努斯力系数；

$C_{y\delta\alpha}\cdot\delta$为无控小舵的影响；

$\vec{\alpha}_e$　为动力平衡角，是$\alpha_T$在ECS中的投影。由图2.1～图2.3有

$$\vec{\alpha}_e=\begin{pmatrix}\alpha_{ex}\\ \alpha_{ey}\\ \alpha_{ez}\end{pmatrix}=L_y(-\psi_v)\cdot L_z(-\theta_v)\cdot L_x(\Phi)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\alpha_T$$

$$\begin{cases} \alpha_{ex} = (-\cos\psi_v \cdot \sin\theta_v \cos\Phi - \sin\psi_v \sin\Phi) \cdot \alpha_T \\ \alpha_{ey} = (\cos\theta_v \cos\Phi) \cdot \alpha_T \\ \alpha_{ez} = (\sin\psi_v \sin\theta_v \cos\Phi - \cos\psi_v \sin\Phi) \alpha_T \end{cases} \tag{17}$$

其中由定义，$\sin\Phi = \beta/\alpha_T$，$\cos\Phi = \alpha/\alpha_T$

弹的转动方程为

$$\dot{p} = (C_{lP} \cdot pl/2v + C_{L\delta} \cdot \delta) QSl/I_x \tag{18}$$

其中$C_{L\delta} \cdot \delta$为无控小舵的影响。

最后还有弹的质心运动学方程（ECS中）

$$[\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}] = \vec{u} \tag{19}$$

积分（16）、（19）、（18）和（11）式就构成了简化六自由度模型（6D）。如果弹有底排或火箭喷推时，还应附加一个微分方程

$$dm/dt = -m_c$$

其中$m_c$为秒流量。需要指出的是，6D仅是R6D的一个近似。

## 3　修正简化六自由度模型（$6D_m$）

6D与R6D的近似仅是在于对攻角过程的描述上。6D在式（6）、（7）处作了近似。当攻角幅值较大时，模型的误差将加大。必须对6D进行修正。

参见图2.3，QVCS与QBCS间的关系可以由$L_x(\Phi^*) L_z(\alpha_T) L_x(-\Phi)$进行坐标转换。这里$\Phi^*$是与$\theta_v$、$\psi_v$、$\theta$、$\psi$有关的非独立角，一般与$\Phi$不相等。但是为了避免求弹的姿态角，根据QVCS与QBCS之间的空间关系，可以近似认为$\Phi^*$与$\Phi$相同。记

$$\phi(\Phi, \alpha_T, -\Phi) = L_x(\Phi) \cdot L_z(\alpha_T) \cdot L_x(-\Phi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_T & \sin\alpha_T \cos\Phi & -\sin\alpha_T \sin\Phi \\ -\sin\alpha_T \cos\Phi & \cos\alpha_T \cos^2\Phi + \sin^2\Phi & -\cos\alpha_T \sin\Phi\cos\Phi + \sin\Phi\cos\Phi \\ \sin\alpha_T \sin\Phi & -\cos\alpha_T \sin\Phi\cos\Phi + \sin\Phi\cos\Phi & \cos\alpha_T \sin^2\Phi + \cos^2\Phi \end{pmatrix}$$

所以，
$$\begin{pmatrix} \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \phi_2(\Phi, \alpha_T, -\Phi) \begin{pmatrix} -\dot{\Phi} \\ \dot{\psi}_v \\ \dot{\theta}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_T \sin\Phi \\ \dot{\alpha}_T \cos\Phi \end{pmatrix} \tag{20}$$

其中$\phi_2(\Phi, \alpha_T, -\Phi)$是$\phi(\Phi, \alpha_T, -\Phi)$的第2.3行组成的2×3矩阵。将其进行Taylor展

开并取前3项有：

$$\phi_2(\Phi,\ \alpha_T,\ -\Phi)=\begin{bmatrix} -\alpha\left(1-\dfrac{\alpha_T^2}{6}+\dfrac{\alpha_T^4}{120}\right) & 1+\alpha^2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right) & -\alpha\beta\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right) \\ \beta\left(1-\dfrac{\alpha_T^2}{6}+\dfrac{\alpha_T^4}{120}\right) & -\alpha\beta\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right) & 1+\beta^2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right) \end{bmatrix} \quad (21)$$

所以$\omega_y$、$\omega_z$的修正公式为

$$\begin{cases} \omega_y=\dot{\beta}+\dot{\psi}_v+\Delta y \\ \omega_z=\dot{\alpha}+\dot{\theta}_v+\Delta z \end{cases} \quad (22)$$

其中，

$$\begin{cases} \Delta y=-\left(-\dfrac{\alpha_T^2}{6}+\dfrac{\alpha_T^4}{120}\right)\alpha\dot{\Phi}+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right)\alpha^2\dot{\psi}_v-\alpha\beta\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right)\dot{\theta}_v \\ \Delta z=\left(-\dfrac{\alpha_T^2}{6}+\dfrac{\alpha_T^4}{120}\right)\beta\dot{\Phi}+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right)\beta^2\dot{\theta}_v-\alpha\beta\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha_T^2}{24}\right)\dot{\psi}_v \end{cases} \quad (23)$$

由 $\sin\Phi=\beta/\alpha_T$ 及 $\cos\Phi=\alpha/\alpha_T$ 知

$$\dot{\Phi}=[\dot{\beta}-\beta\dot{\alpha}_T/\alpha_T]/\alpha \quad 或 \quad \dot{\Phi}=-(\dot{\alpha}-\beta\dot{\alpha}_T)/\beta \quad (24)$$

并且由 $\alpha_T^2=\alpha^2+\beta^2$有

$$\dot{\alpha}_T=(\alpha\cdot\dot{\alpha}+\beta\cdot\dot{\beta})/\alpha_T \quad (25)$$

以上对角速度的投影关系作了修正，还需对力矩的投影进行类似的修正。在QVCS中记

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{QVCS}=\begin{bmatrix} b_1\beta-b_2\alpha \\ b_1\alpha+b_2\beta \end{bmatrix} I_y$$

则在QBCS中近似地有

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{QBCS}\doteq\Phi_2(\Phi,\alpha_T,\ -\Phi)\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{QVCS}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\alpha_T^2}{24}\right)\begin{bmatrix}\alpha^2 & -\alpha\beta\\ -\alpha\beta & \beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b_2 & b_1\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}I_y+\begin{bmatrix}M_y\\ M_z\end{bmatrix}_{QVCS}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\alpha_T^2}{24}\right)\begin{bmatrix}-\alpha\\ \beta\end{bmatrix}b_2\alpha_T^2 I_y+\begin{bmatrix}M_y\\ M_z\end{bmatrix}_{QVCS} \tag{26}$$

忽略$\Delta y$、$\Delta z$对时间的导数，则式（11）中其余部分不变，可仅将$\tilde{D}_g$改为$\tilde{D}_g^*$，

$$\tilde{D}_g^*=(b_4-ib_3)g\cos\theta_v/u+(b_3+ib_4)(\Delta y+i\Delta z)+$$

$$(i\beta-\alpha)(-\tfrac{1}{2}+\alpha_T^2/24)b_2\alpha_T^2 \tag{27}$$

将式（11）改为 $\ddot{\tilde{\xi}}+(A-iB)\dot{\tilde{\xi}}-(C+iD)\tilde{\xi}=\tilde{D}_g^*$ （28）

积分式（16）、（19）、（18）、（28）就是修正6D模型（$6D_m$）。

## 4　五自由度模型（5D）与修正五自由度模型（$5D_m$）

旋转稳定弹的名义弹道计算中，攻角的快频运动分量要远小于慢频运动分量。5D的基本思想在于仅仅考虑慢频攻角运动这个主要矛盾，忽略快频攻角运动。实践表明这是可行的。

从s-域的6D出发，式（12）是非强时变的。在固定时刻，式（12）可看成线性定常子系统，其主导特征根即慢频特征根为

$$\tilde{Z}_s=\lambda_s+i\Phi'_s \tag{29}$$

其中，
$$\begin{cases}\Phi'_s=\frac{1}{2}\left[P-(P^2-4M)^{1/2}\right]\\ \lambda_s=-\frac{1}{2}\left[H+(2PT-PH)/(P^2-4M)^{1/2}\right]\end{cases} \tag{30}$$

式（12）的稳态解为

$$\tilde{\xi}_g=-\tilde{D}_g\left[u^{-2}/(M+iPT)\right] \tag{31}$$

为使式（12）保持稳态解$\tilde{\xi}_g$不变同时又仅保留慢频特征根，显然应有

$$\tilde{\xi}'-\tilde{Z}_s\tilde{\xi}=-\tilde{Z}_s\tilde{\xi}_g \tag{32}$$

将上式变换至时间域并记 $\tilde{W}=-u\cdot\tilde{Z}_s\tilde{\xi}_g$ 则

$$\dot{\tilde{\xi}}-u\tilde{Z}_s\tilde{\xi}=\tilde{W} \tag{33}$$

这样，积分式（16）、（18）、（19）、（33）即是5D模型。

修正5D很简单，只要将式（31）中的$\widetilde{D}_g$代以$\widetilde{D}_g^*$即实现了$5D_m$。在攻角不太大时（<15°），使用5D而当攻角很大时才使用$5D_m$，这样可以避免不必要的计算。由于$\phi'_s$实质上代表了5D或$5D_m$简化系统的特征频率，积分步长h的公式可为

$$h = 2\pi u / (\Phi'_s N),\quad (N = 30 \sim 40) \tag{34}$$

由上式可进行自适应步长积分，大大减少计算时间。图4.1为$5D_m$的建议积分步长h（$V_0 = 795$ m/s；QE = 72°；名义弹道）。图4.2为初始扰动（$\alpha_0 = 10°$）下，5D与R6D的攻角时间曲线对比（$V_0 = 897$m/s QE = 45°）。计算使用SRC 155mm，ERFB MK10 MOD2弹。

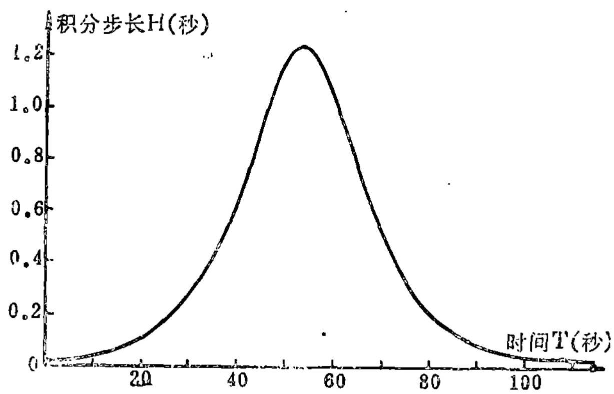



图4.1　建议积分步长h－T曲线（N＝40）

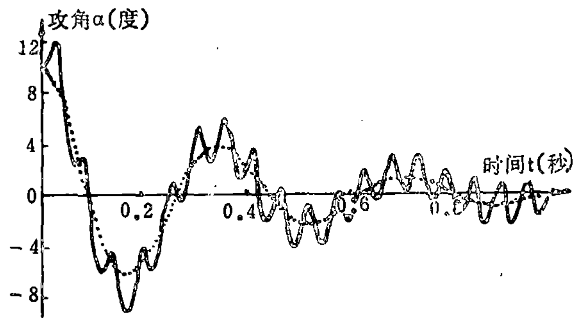



图4.2　R6D、5D攻角扰动（$\alpha_0 = 10°$）过渡过程比较

## 5　快速四自由度模型（4D）

这里的4D仅考虑式（11）的稳态解$\widetilde{\xi}_g$，见式（31）。积分式（16）、（18）、（19）就可得到4D弹道诸元。积分过程中要解式（31）来得到攻角，由于$\widetilde{\xi}_g$实际上包含了与$|\widetilde{\xi}_g|$有关的非线性气动系数，所以式（31）为一非线性代数方程，可以写作

$$\widetilde{\xi}_g = f(|\widetilde{\xi}_g|) \tag{35}$$

其中$|\widetilde{\xi}_g| = \alpha_T$。

式(35)一般要使用迭代法来求取$\tilde{\xi}_g$。幸运的是，只须采用一般简单迭代法即使用上次积分的$\tilde{\xi}_g$作为当前积分中的迭代初值，式(35)会很快收敛到当前$\tilde{\xi}_g$值。实践表明，在给定迭代出口精度下(如$10^{-7}$弧度)，所需的计算花费很小，一般仅需几次迭代。从式(35)得到$\tilde{\xi}_g$后，可得到$\alpha_T$、$\Phi$代入式(17)即可得到$\vec{\alpha}_e$。

本文所得到的4D可以说是非常“精确”的4DOF模型，所有对$\vec{\alpha}_e$有影响的因素都已考虑到。计算表明，本文4D与〔6〕、〔7〕的结果精度相同，但比〔6〕快40%。

## 6 结 论

从表1、表2可以看出，在计算名义弹道上，6D与5D、$6D_m$与$5D_m$的结果精度分别相当。

表 1 155mmERFB弹4D、5D和R6D结果比较

| | $V_0=897m/s$ | $QE=65°$ | $V_0=266m/s$ | $QE=72°$ |
|---|---|---|---|---|
| | 射程(m) | 侧偏(m) | 射程(m) | 侧偏(m) |
| R6D | 25818 | 1698 | 3446 | 254 |
| 5D | 25819(+1) | 1701(+3) | 3448(+2) | 255(+1) |
| 4D | 25891(+73) | 1782(+84) | 3463(+17) | 264(+10) |
| $\alpha_{T\ max}$ | 14° | | 21° | |

表 2 155mm ERFB弹，$V_0=795m/s$，$QE=72°$，$\alpha_{T_{max}}=28°$

| | R6D | 5D | 6D | $5D_m$ | 4D |
|---|---|---|---|---|---|
| 射程(m) | 15889 | 15930(+41) | 15928(+39) | 15884(−5) | 15903(+14) |
| 侧偏(m) | 1527 | 1508(−19) | 1508(−19) | 1514(−13) | 1623(+96) |
| CPU | 10284 | 1523.6 | 7725.0 | 91* | 17.3 |

• 注：为自适应步长计算，其余为定步长。计算在IBM/PCXT上进行，有8087

$5D_m$在攻角较大时明显地改善了5D、4D的结果。$5D_m$在4D和R6D之间作了很好的折衷，无论是在计算速度上还是在计算精度上。采用自适应步长积分时，$5D_m$仅比4D慢4～6倍而比R6D快110倍以上。图5.1、图5.2是β—α曲线比较及全攻角曲线比较，可以看出，$5D_m$是一个有实际应用意义的弹道计算模型。4D的推导思路清晰，还比SRC LOBS快40%。

本文的工作实际上是寻求名义弹道既快又准的计算方法。关于扰动弹道的既快又准的计算方法见〔9〕。

致谢：本文作者感谢祁载康教授的有力指导及SRC上下的友好支持。

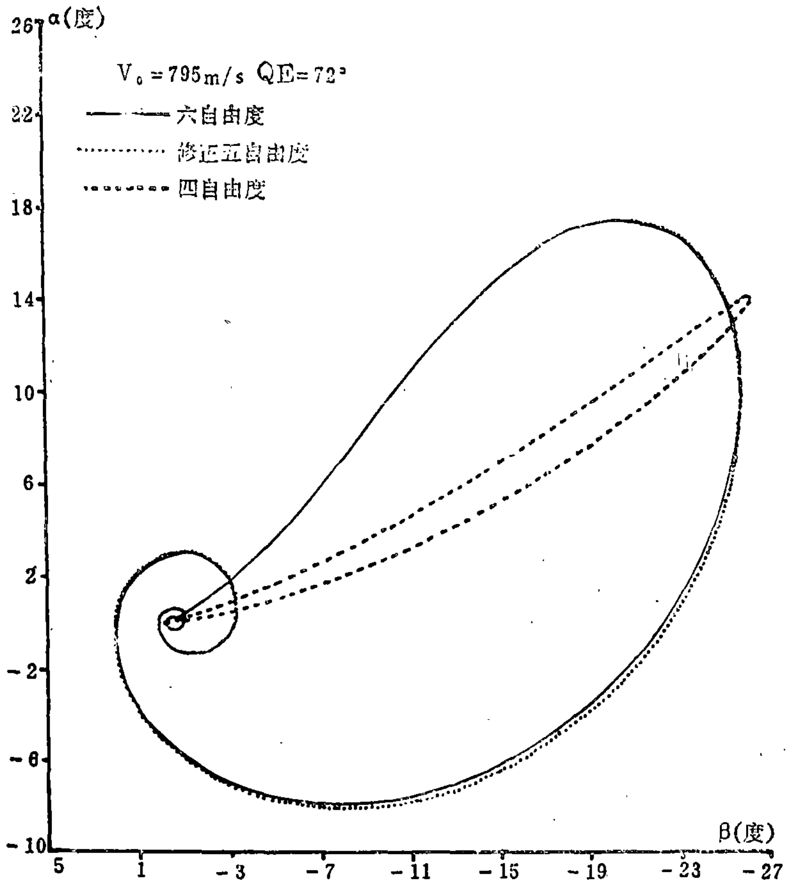



图5.1 ERFB弹道计算β-α曲线比较

## 符 号 表

$\vec{v}$ 弹丸相对风的速度

$\vec{u}$ 弹丸速度

**S** 参考面积， $S=\frac{\pi}{4}l^2$

**p** 弹丸转速

$\theta_v$、$\psi_v$ 弹丸速度 $\vec{V}$ 相对地面的倾角与偏角

$C_{d\alpha^2}$ 攻角诱导阻力系数

$C_{L\alpha^3}$ 立方升力系数

$C_{m\alpha^3}$ 立方翻转力矩系数

$C_{yP\alpha}$ 马格努斯力系数

$C_{mP\alpha}$ 马格努斯力矩系数

$\vec{w}$ 风的速度

$Q=\frac{1}{2}\rho v^2$ 动压头

$l$ 参考长度（弹径）

$I_x$、$I_y$ 弹的轴向与横向转动惯量

θ，ψ 弹体俯仰、偏航姿态角

$C_{d0}$ 零攻角阻力系数

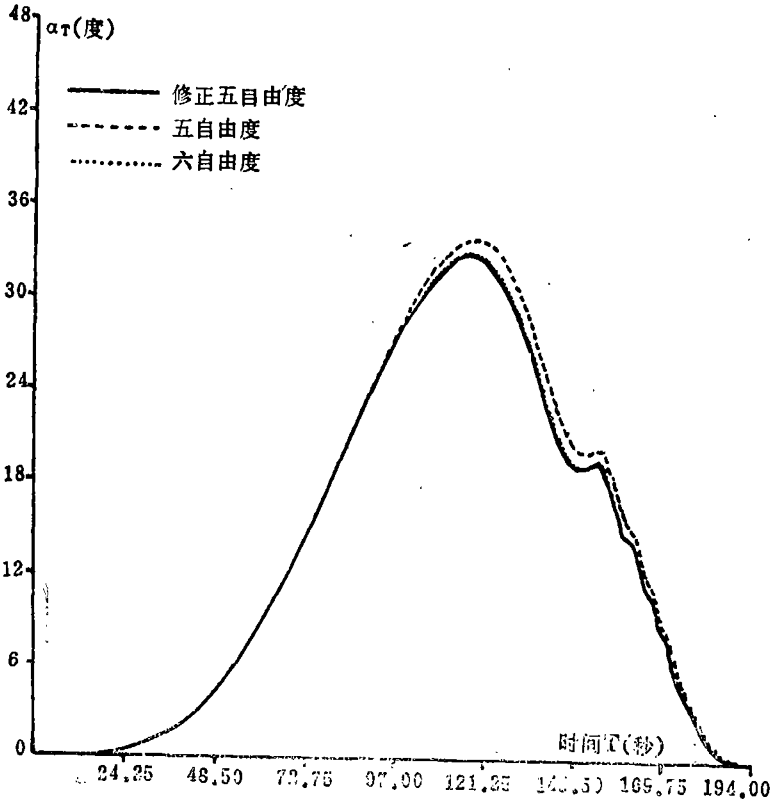
$C_{L\alpha}$ 线性升力系数

$C_{m\alpha}$ 线性翻转力矩系数

$C_{mq\alpha}$ 俯仰阻尼力矩系数

$C_{y^*P\alpha}$ 有效马格努斯力系数

$C^*_{mP\alpha}$ 有效马格努斯力矩系数




（巴黎大炮道弹计算 $V_0=1646m/s$　$\theta_E=50^\circ$ [5]）

图5.2　全攻角$\alpha_T$与时间t曲线比较

$C_{lP}$　滚转阻尼力矩系数

$C^*_{lP}$　有效滚转阻尼力矩系数

$\delta$　小舵翼片的斜置角

$\vec{F}_t$　发动机推力矢量

$[X,Y,Z]^T$　弹丸在ECS中的位置

m　弹丸质量

$\vec{g}$　重力加速度

$\vec{\Lambda}$　柯氏加速度

$\vec{g}''$　离心加速度

TAVCS　全攻角速度坐标系

TABCS　全攻角弹体坐标系

## 主 要 参 考 文 献


〔1〕Qi, Zai Kang（祁载康）、Chen, Yang Quan（陈阳泉），A Six Degree of Freedom Projectile Model And Program LOB6, SRC-TM-87678, Sept, 1987.

〔2〕C.H.Murphy, Free Flight Motion of Symmetric Missiles, BRL Report No. 1216, July, 1963

〔3〕D.Lyster, Program LOBS——A Modified Point Mass Trajectory Program, SRC-CP-79109-B, Nov,1979, Rev,B, Mar,1988

DOI:10.15892/j.cnki.djzdxb.1991.01.001



# 旋转稳定弹弹道计算模型及软件研究(三)

## 一个新的无控旋转弹弹道计算刚体六自由度模型

陈 阳 泉

〔摘要〕提出了一个新的无控旋转弹弹道计算刚体六自由度模型（R6D）。引入了全攻角空速坐标系（TAWCS）和全攻角弹体坐标系（TABCS），使大攻角气动力及力矩的投影关系得到准确刻划；给出了与四自由度模型（4D）所定义攻角的换算公式。本文的R6D已与SRC LOBS连接，共享其优点。本文的工作使得不同弹道模型之间真正具有了计算可比较性，R6D成为一个考核标准。

〔叙词〕旋转稳定弹药　外弹道计算　模型　计算机程序

## 引 言

无控旋转弹的弹道计算模型已经发展得比较完善[1]～[10]。在不同的设计阶段或对于不同的研究目的，常常需要使用不同精度的弹道计算模型。不过，R6D总是需要的。问题是，R6D的结果与其它模型的计算结果要具有计算可比较性才能使用R6D对其它模型进行校验、确定其精度范围、使用条件等。这种计算可比性是要求各弹道模型计算仅仅是使用的弹道模型或微分方程组右端函数方面有区别，其余一切情况如大气、地球引力、推力、气动力计算、积分及积分事件捕捉、弹道终止等模块是相同的，最好就使用同种模块。本文以SRC LOBS[3]'[4]为基础，基于计算可比性的考虑，介绍LOBS中加入的R6D模型。R6D中引入全攻角空速坐标系（TAWCS）和全攻角弹体坐标系（TABCS），使空气动力和力矩得到准确描述。R6D中还可引入各种扰动，给出了换算成4D中攻角$\alpha$、$\beta$的公式。本文在LOBS中加入的R6D可以成为具有计算可比性的考核标准模型。这对研究新的弹道模型或揭示不同模型之间的关系是有意义的[8]。

## 1 坐标系定义及几何关系方程

R6D中定义了下述几种坐标系：

TAWCS：全攻角空速坐标系；
TABCS：全攻角弹体坐标系；
BCS　：弹体坐标系；
QBCS　：准弹体坐标系；

QWCS　：准空速坐标系；

ECS　：地面坐标系。

其中：ECS的准确定义是（ECS——A-XeYeZe）；

**A：** 发射点；

$A\vec{X}_e$：发射方向在水平面的投影，指向发射方向为正；

$A\vec{Y}_e$：过A点的地垂线，向上为正方向；

$A\vec{Z}_e$：由右手坐标准则确定。

BCS、QBCS的形象定义见文献[1]。但是实际上，没有必要象文献[1]'[14]等对每一种使用的坐标系进行形象化描述，这里使用各坐标之间的转角关系图来描述，见图1。其中

$$L_x(\alpha_x)=[\alpha_x]_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha_x & \sin\alpha_x\\ 0 & -\sin\alpha_x & \cos\alpha_x\end{pmatrix}$$

$$L_y(\alpha_y)=[\alpha_y]_y=\begin{pmatrix}\mathrm{con}\,\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y\end{pmatrix}$$

$$L_z(\alpha_z)=[\alpha_z]_z=\begin{pmatrix}\cos\alpha_z & \sin\alpha_z & 0\\ -\sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

显然$L(\alpha)=L^T(-\alpha)$

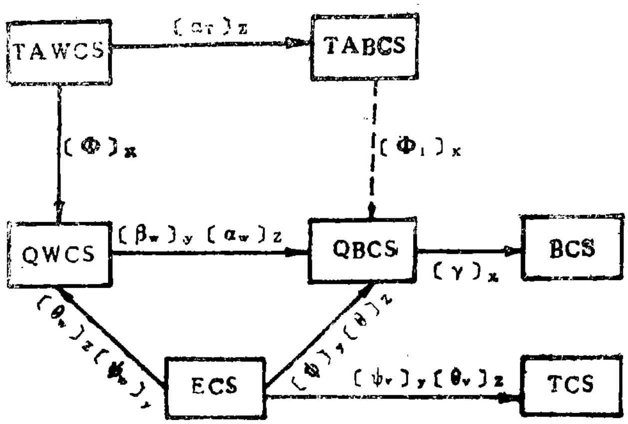



图1 R6D中坐标系转角关系图

图1中，$\psi_w$、$\theta_w$为弹相对风的速度$\vec{V}$的方向角，$\psi_v$、$\theta_v$为弹速度$\vec{u}$的方向角。在ECS中记$\vec{V}$，$\vec{u}$及风速$\vec{W}$分别为$[V_x, V_y, V_z]^T$、$[u_x, u_y, u_z]^T$及$[W_x, W_y, W_z]^T$那么，$\vec{V}=\vec{u}-\vec{W}$在ECS中表示为：

$$[V_x, V_y, V_z]^T=[u_x-W_x, u_y-W_y, u_z-W_z]^T \tag{1}$$

则有

$$\psi_w=-tg^{-1}(V_z/V_x),\quad \theta_w=tg^{-1}(V_y/(V_x^2+V_z^2)^{\frac{1}{2}})$$

及

$$\psi_v=-tg^{-1}(u_z/u_x),\quad \theta_v=tg^{-1}(u_y/(u_x^2+u_z^2)^{\frac{1}{2}}) \tag{2}$$

$\psi$、$\theta$、$\gamma$为弹体相对ECS的姿态角。图1中，视$\psi_w$、$\theta_w$、$\psi$、$\theta$为独立角，那么$\Phi$、$\alpha_T$、$\beta_W$、$\alpha_w$均可由这四个独立角从几何关系方程得到。$\alpha_T$为全攻角，总为正值，$\Phi$为全攻角平面转动角度。这里的几何关系方程由一个计算机程序自动推导得到[13]，下列(3)、(4)式就是计算机推导的结果。

$$\begin{cases}\alpha_w=\sin^{-1}\{[\sin\theta\cos\theta_w\cos(\psi-\psi_w)-\sin\theta_w\cos\theta]/\cos\beta_w\} \\ \beta_w=\sin^{-1}[\cos\theta_w\sin(\psi-\psi_w)]\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\cos\alpha_T=\cos\alpha_w\cdot\cos\beta_w \\ \sin\Phi=\cos\alpha_w\cdot\sin\beta_w/\sin\alpha_T \\ \cos\Phi=\sin\alpha_w/\sin\alpha_T\end{cases} \tag{4}$$

(4)式中为避免数值病态，应使用

$$\alpha_T=\sin^{-1}[(\sin^2\alpha_w+\sin^2\beta_w-\sin^2\alpha_w\cdot\sin^2\beta_w)^{\frac{1}{2}}] \tag{5}$$

参见4D中$\alpha$、$\beta$的定义[3,4,6,8]，此时显然

$$\begin{cases}\alpha=\alpha_T\cos\Phi \\ \beta=\alpha_T\sin\Phi\end{cases} \tag{6}$$

图1中定义了TAWCS及TABCS，这是由于气动系数通常都是在全攻角面上给出的，为了准确反映较大攻角运动时的气动力投影关系，应将气动力以及力矩在全攻角面上计算出来，然后使用$\alpha_T$、$\Phi$的关系进行投影。当然，当$\alpha_T$较小时可以近似地将全攻角面上给出的气动系数同用于纵向和侧向面，实际上，这是作了$\alpha_T^2=\alpha_W^2+\beta_W^2$的假设，见式(5)。

## 2 R6D弹道方程

在ECS中建立弹的质心运动学及动力学方程，

$$
\begin{cases}
du_x/dt = \sum\limits_i F_{xei}/m \\
du_y/dt = \sum\limits_i F_{yei}/m \\
du_z/dt = \sum\limits_i F_{zei}/m
\end{cases} \tag{7}
$$

$$
[\, dx_e/dt,\ dy_e/dt,\ dz_e/dt \,]^T = [\, u_x,\ u_y,\ u_z \,]^T \tag{8}
$$

其中

$$
[\, \sum_i F_{xei},\ \sum_i F_{yei},\ \sum_i F_{zei} \,]^T
$$

为弹所受合力在ECS中的分量，m为弹的质量，$[\, x_e,\ y_e,\ z_e \,]^T$为弹位置在ECS中的分量。

记$\vec{\omega}$为BCS相对于ECS的转动角速度，$\vec{\omega}_Q$为QBCS相对ECS的转动角速度，记

$$
\vec{\omega} = (\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z)^T,\ 则\ \vec{\omega}_Q = (\omega_x - \dot{\gamma},\ \omega_y,\ \omega_z)^T \tag{9}
$$

在QBCS中，

$$
d\vec{H}/dt + \vec{\omega}_Q \times \vec{H} = \sum_i \vec{M}_i \tag{10}
$$

其中，角动量

$$
\vec{H} = (I_x\omega_x,\ I_y\omega_y,\ I_z\omega_z)^T
$$

$\sum\limits_i \vec{M}$为弹所受合力矩向量

通常对于轴对称弹，$I_y = I_z$，所以绕质心运动动力学方程为

$$
\begin{cases}
d\omega_x/dt = \sum\limits_i M_{xi}/I_x \\
d\omega_y/dt = [\, \sum\limits_i M_{yi} - I_x\omega_x\omega_z + I_y(\omega_x - \dot{\gamma})\omega_z \,]/I_y \\
d\omega_z/dt = [\, \sum\limits_i M_{zi} + I_x\omega_x\omega_y - I_y(\omega_x - \dot{\gamma})\omega_y \,]/I_y
\end{cases} \tag{11}
$$

由于

$$\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=L_Z(\theta)\begin{pmatrix}0\\ \dot{\psi}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ 0\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \sin\theta & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \dot{\psi}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} \tag{12}$$

所以，弹绕质心运动的运动学方程为

$$\begin{cases}\dot{\gamma}=\omega_x-\mathrm{tg}\theta\cdot\omega_y\\ \dot{\psi}=\omega_y/\cos\theta\\ \dot{\theta}=\omega_z\end{cases} \tag{13}$$

以上由式(7)、(8)、(11)及式(13)，共12个一阶微分方程。这就是R6D弹道方程。当弹有底部排气或火箭喷推时，还应有第13个微分方程

$$dm/dt=-m_c \tag{14}$$

其中，$m_c$为秒流量。

## 3　作用于弹上的力和力矩及其投影

空气动力在TAWCS中定义

$$\vec{F}_a=\begin{pmatrix}-Qs\cdot(C_{do}+C_{d\alpha}\cdot\alpha_T^2)\\ Qs\cdot(C_{L\alpha}\cdot\alpha_T+C_{L\alpha 3}\cdot\alpha_T^3)\\ Qs\cdot(C_{yp\alpha}\cdot pl/2v)\alpha_T\end{pmatrix} \tag{15}$$

其中，$Q$：动压头，$Q=\frac{1}{2}\rho v^2$；

$\rho$：空气密度；

$s$，$l$：弹的参考面积和参考长度，$s=(\pi/4)l^2$；

$v=\|\vec{v}\|$：弹相对风的速度；

$p=\dot{\gamma}$：弹的转速；

$C_{do}$：零攻角阻力系数；

$C_{d\alpha}$：攻角诱导阻力系数；

$C_{L\alpha}$：线性升力系数；

$C_{L\alpha^3}$：立方升力系数；

$C_{yp\alpha}$：马格努斯力系数。

空气动力矩部分定义在TAWCS中（$\vec{M}a_2$），部分仍定义在QBCS中（$\vec{M}a_1$），

$$\vec{M}a_1=\begin{pmatrix} Qsl & C_{lp} & (pl/2v) \\ Qsl & C_{mq\alpha} & (\omega_y l/2v) \\ Qsl & C_{mq\alpha} & (\omega_z l/2v) \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\vec{M}a_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -Qsl\ C_{mp\alpha}(pl/2v)\cdot\alpha_T \\ Qsl(C_{m\alpha}\cdot\alpha_T+C_{m\alpha^3}\cdot\alpha_T^3) \end{pmatrix} \tag{17}$$

其中，$C_{lp}$：滚转阻尼力矩系数；

$C_{mp\alpha}$：马格努斯力矩系数；

$C_{m\alpha}$：线性翻转力矩系数；

$C_{m\alpha^3}$：立方翻转力矩系数；

$C_{mq\alpha}$：俯仰阻尼力矩系数。

当计及弹的无控小舵的效应时，$O_{lp}$、$C_{yp\alpha}$、$C_{mp\alpha}$分别应修正为：

$$\begin{cases} C_{lp}^{*}=C_{lp}+C_{l\delta}\cdot\delta/(pl/2v) \\ C_{yp\alpha}^{*}=C_{yp\alpha}+C_{y\delta\alpha}\cdot\delta/(pl/2v) \\ C_{mp\alpha}^{*}=C_{mp\alpha}+C_{mp\delta}\cdot\delta/(pl/2v) \end{cases} \tag{18}$$

上式中、$C_{l\delta}$、$C_{y\delta\alpha}$、$C_{mp\delta}$为翼片诱导系数导数，$\delta$为翼片斜置角。

至此，式（7）中的

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_i F_{xei} \\ \sum\limits_i F_{yei} \\ \sum\limits_i F_{zei} \end{pmatrix}=m(\vec{g_e}+\vec{g''}+\vec{\Lambda})+L_y(-\psi)\cdot L_z(-\theta)\cdot L_x(-\gamma)$$

$$\cdot L_y(-\psi_p)\cdot Lz(-\theta_p)\begin{pmatrix} F_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+L_y(-\psi_w)\cdot Lz(-\theta_w)$$

$$\cdot L_x(\phi)\cdot\vec{F_a} \tag{19}$$

式中$\psi_p$、$\theta_p$是推力$F_t$矢量在BCS中的方向角。如果推力作用点在BCS中的位置为

$$\vec{r}_t = (x_t,\ y_t,\ z_t)^T$$

那么，推力偏心引起的力矩$\vec{M}_t$在BCS中写成

$$\vec{M}_t = \vec{r}_t \times \vec{F}_t = [F_{tz}Y_t - F_{ty}Z_t,\ F_{tx}Z_t - F_{tz}X_t,\ F_{ty}X_t - F_{tx}Y_t]^T \tag{20}$$

其中，$\vec{F}_t$为推力在BCS中的投影，

$$\vec{F}_t = (F_{tx},\ F_{ty},\ F_{tz})^T = L_y(-\psi_p)L_z(-\theta_P)\begin{pmatrix} F_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

式(19)中，$\vec{g}_0$：重力加速度向量；

$\vec{g}''$：离心力加速度向量；

$\vec{\Lambda}$：柯氏力加速度向量。

它们在ECS中的分量公式，详见[3,8]。

如果考虑底排减阻效应[3]$C_{dB}$，此时$\vec{F}a$的x方向($\vec{V}$)分量应写作

$$F_{ax} = -Q_s(C_{d0} + C_{d\alpha} \cdot \alpha_T^2 - C_{dB}) \tag{22}$$

式(11)中的

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_i M_{xi} \\ \sum\limits_i M_{yi} \\ \sum\limits_i M_{zi} \end{pmatrix} = \vec{M}a_1 + L_z(\alpha_w)L_y(\beta_w)L_x(\Phi)\vec{M}a_2 + L_x(-\gamma)\vec{M}_t \tag{23}$$

至此，R6D模型全部导出，且考虑了推力偏心及无控翼片的影响。R6D的优点在于能准确预测各种扰动的影响，一般考虑的扰动量，动不平衡因素、气动不对称、随机风等。本文的R6D可以方便地加入这些扰动源。限于篇幅，本文这里从略，详见参考文献[2,8,9,15]。

## 4　初始扰动的变换

在LOBS中，4D以$K_{10}$、$K_{20}$来描述初始攻角扰动，即初始攻角快频幅值和慢频幅值。由[8,11]，$K_{10}$、$K_{20}$与复攻角$\tilde{\xi}_0$($\tilde{\xi}_0 = i\alpha_0 + \beta_0$)初始扰动具有换算关系。在5D、5Dm及

6D、$6D_m$中，攻角初始扰动均以$\alpha_0$、$\beta_0$输入[8,10]，而在R6D中只能由$\psi_{w0}$、$\theta_{w0}$、$\theta_0$和$\psi_0$来描述。这里介绍已知$\alpha_0$、$\beta_0$，$\psi_{w0}$、$\theta_{w0}$来求取$\theta_0$、$\psi_0$。由图1，不难得到

$$\begin{cases} \theta_0 = \sin^{-1}[\cos\alpha_{w0}\cdot\cos\beta_{w0}\cdot\sin\theta_{w0}+\sin\alpha_{w0}\cdot\cos\theta_{w0}] \\ \psi_0 = \sin^{-1}[\sin\beta_{w0}\cos\theta_{w0}\cos\psi_{w0}+\cos\beta_{w0}\sin\psi_{w0}] \end{cases} \tag{24}$$

由前面的几何关系方程

$$\begin{cases} \alpha_{T0} = (\alpha_0^2+\beta_0^2)^{1/2} \\ \alpha_{w0} = \sin^{-1}(\alpha_0\sin\alpha_{T0}/\alpha_{T0}) \\ \beta_{w0} = \sin^{-1}[(\beta_0\sin\alpha_{T0}/\alpha_{T0})/\cos(\alpha_{w0})] \end{cases} \tag{25}$$

由于R6D的角速度扰动是由$\omega_{y0}$、$\omega_{z0}$来输入的，它们与$\dot{\alpha}_0$、$\dot{\beta}_0$的关系是很复杂的。假设角速度扰动时没有攻角扰动，此时

$$\alpha_0 = \theta_0 - \theta_{w0} = 0,\quad \beta_0 = \psi_0 - \psi_{w0} = 0$$

那么，$\dot{\alpha}_0 = \dot{\theta}_0$，$\dot{\beta}_0 = \dot{\psi}_0$，此时

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \omega_{z0} \\ \dot{\beta}_0 = \omega_{y0}/\cos\theta_0 \end{cases} \tag{26}$$

如果攻角扰动与角速度扰动同时存在，式（26）将变得非常复杂。但由图1总能推导得到。

## 5 算例

5.1 以SRC 155mm ERFB MK10 MOD 2 弹，$V_0=795$m/s、$\theta_E=72°$为例，计算无扰动名义弹道。表1给出了不同弹道模型的计算结果及CPU机时的对比。使用的程序

**表 1 $V_0=795$m/s，$\theta_E=72°$ 不同模型名义弹道计算结果**

| | R6D | 5D | 6D | 5Dm | 4D |
|---|---|---|---|---|---|
| 射程（m） | 15889 | 15930（+41） | 15928（+39） | 15884（−5） | 15903（+14） |
| 射偏（m） | 1527 | 1508（−19） | 1508（−19） | 1514（−13） | 1623（+96） |
| CPU (sec) | 10284 | 1523.6 | 7725.0 | 91 * | 17.3 |

*)注：为自适应步长计算，其余为定步长。计算在IBM/PC-XT上进行，有8087。

D456R6以LOBS为基础，加入了多种弹道模型，已经精心考虑了计算可比性问题。

5.2　弹型同5.1，$V_0 = 897m/s$，$\theta_E = 45°$。图2是以$I_{xy} = 4000kg \cdot mm^2$描述的动不平衡影响下，速度偏角$\psi_v - t$曲线。图3是$I_{xy} = 4000kg \cdot mm^2$动不平衡的等效初始角速度扰动（$\omega_{y0} = 0.5825$转/秒）加入结果。对比图2、图3，两者的结果几乎一样。这验证了[2,8]的结论，即能够形成高频干扰力矩的外加干扰（如动不平衡、推力偏心等与弹体一起高速旋转的这类干扰）都可能被一起始角速度扰动来等效。具体的等效公式见[2]。

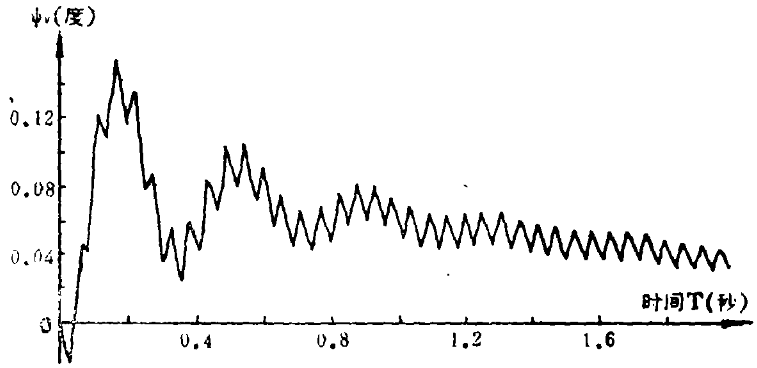



图2 $\psi_V$-T曲线（动不平衡$I_{xy}$=4000kg · mm²）

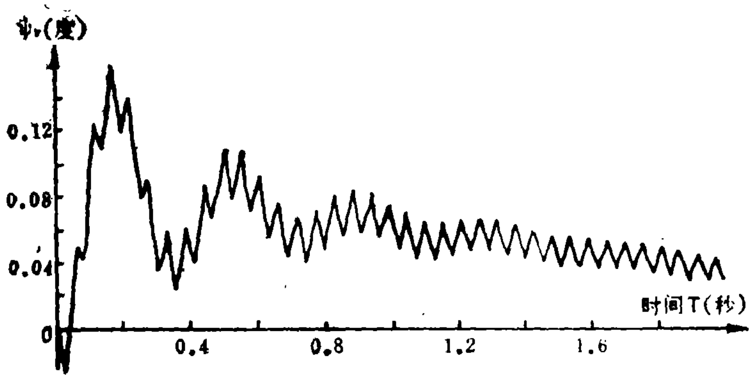



图3 $\psi_V$-T曲线（起始角速度扰动$\omega_{y0}$=0.5825转/秒）

## 6　结论

本文从计算可比性的角度提出了一个新的刚体六自由度弹道计算的模型。引进了两个新的坐标系TAWCS和TABCS准确刻划了大攻角时的气动力及力矩的投影关系。R6D与LOBS联接，同享其优点，还给出了攻角扰动的换算公式及不同定义下攻角的变换关系式。这些使得本文的工作能够在研究新的弹道模型或不同弹道模型间的关系等方面发挥优点。本文的R6D可成为一个考核标准模型。它本身在研究扰动等方面也具有实用价值。

致谢：作者感谢祁载康教授的有力指导，本文的大部分工作得到过SRC的资助。

## 参 考 文 献

〔1〕林瑞雄、张鸿端编著，《导弹飞行力学（上册）》，北京理工大学，1984年3月

〔2〕徐明友编著，《火箭外弹道学》，国防工业出版社，1979年

〔3〕D·Lyster, Program LOB, SRC-R-104

〔4〕D·Lyster, Drogram LOBS, SRC-R-109

〔5〕Lieske, Euation of Motion for a Modified Point Mass Trajectory, BRL Report № 1314, Mar, 1966

〔6〕C·H·Murphy, Free flight motion of symmefric missiles, BRL Repat № 1216, July, 1963

〔7〕C·H·墨菲著，韩子鹏译，《对称发射体的自由飞行运动》，国防工业出版社，1984年3月

〔8〕陈阳泉，《飞行器仿真研究及靶道气动力系数辨识》，北京理工大学硕士研究生论文，1988年4月

〔9〕Qi, Zai-knug（祁载康）and Chen, Yang-Quan（陈阳泉），A Six degree of freedom projectile model and poogram LOB6, SRC-TM-87678, sept 1987

〔10〕Qi, Zi-kang and Chen, Yang-Quaan, A 5D model for calcnlating high elevatiou projectile trajectories and an accurate 4D model, SRC-TM-87677, Sept, 1987

〔11〕Qi, Zai-kang and Chen, yang-Quan, Initial disturbance and dynamic imbalance effect, on projectile trajectory, SRC-TM-87679, oct, 1987

〔12〕Qi, Zai-kaug and D·Lyster, A fast algori fhm for solving Lieskes yaw of repose equation, SRC-TM-87676, sept, 1987

〔13〕陈阳泉，《坐标系转换矩阵与几何关系方程式的推导程序》，西安工业学院学报，Vol.9, №3

〔14〕扬鑫声，《旋转有翼飞行器的散布模型》，电子技术与系统工程，1982年6月

〔15〕刘中浮，《炮射导弹和炮弹弹道仿真软件的开发和靶场雷达数据处理》，北京理工大学硕士研究生论文，1987年4月