

旋转稳定弹弹道计算的快速 四自由度模型

陈阳泉

(计算机控制教研室)

摘 要

本文提出了一个新的旋转稳定弹弹道计算的快速四自由度模型(4DOF)。文中考虑了所有可能对 α 作贡献的因素。计算表明,这种新模型与我国从SRC引进软件LOBS中的模型相比,在同等精度下,计算速度提高40%,而且模型推导简单。文中给出的模型容易取代LOBS中的相应模块。

关键词: 弹道计算; 旋转稳定弹; 四自由度模型。

附号表

$C_{l\dot{\alpha}}$ ——滚转阻尼系数	$C_{l\delta}$ ——翼片滚转阻尼系数
C_{d0} ——零升力阻力系数	$C_{d\alpha}$ ——攻角诱导阻力系数
$C_{L\alpha}$ ——线性升力系数	$C_{L\alpha^3}$ ——立方升力系数
$C_{m\alpha}$ ——线性翻转力矩系数	$C_{m\alpha^3}$ ——立方翻转力矩系数
$C_{m\dot{\rho}\alpha}$ ——Magnus力矩系数	$C'_{m\dot{\rho}\alpha}$ ——有效Magnus力矩系数
$C_{mq\alpha}$ ——俯仰阻尼系数	$C_{y\rho\alpha}$ ——Magnus力系数
ECS——地面坐标系	F_t ——火箭喷推力
g ——地心引力加速度矢量	g'' ——离心加速度矢量
I_x, I_y ——弹的轴向及横向转动惯量	L ——发射点纬度
l ——参考长度,取弹径	m ——弹丸质量
p ——弹丸轴向转速	Q ——动压头, $Q = 1/2\rho v^2$
r_e ——地球半径,	S ——参考面积, $S = \pi/4l^2$
s ——弹道弧长, $ds/dt = u$	u ——弹丸相对地面的速度

\boldsymbol{v} —— 弹丸相对空气的速度, $v = \ \boldsymbol{v}\ $	\boldsymbol{W} —— 相对于地面的风速
ρ —— 空气密度	δ —— 定心舵斜置角
\boldsymbol{A} —— Coriolis 加速度矢量	Ω —— 地球自转速度
λ —— 射击方位角, 从正北方向起顺时针计	θ, ψ_0 —— 弹速 \boldsymbol{v} 在 ECS 中的倾角与偏角
$\tilde{\xi}$ —— 复攻角, $\tilde{\xi} = i\alpha + \beta$	α_T —— 全攻角, 总为正, $\alpha_T = \tilde{\xi} $
$[x, y, z]$ —— 弹在 ECS 中的位置分量	$[u_x, u_y, u_z]$ —— 弹速 \boldsymbol{u} 在 ECS 中的投影分量
$(*)$ —— 指 $(*)$ 为复数	
$(*)'$ —— $d(*)/ds$	$\dot{(*)}$ —— $d(*)/dt$

引言

影响外弹道计算准确度的主要原因之一是对攻角运动过程的计算不准确。

使用精确的刚体动力学六自由度模型可以得到攻角的准确变化过程, 从而得到射程和射偏的精确值。但六自由度模型中角运动的所谓“快频(快臂)”与“慢频(慢臂)”运动耦合在一起, 数值积分的步长必须很小, 即太费计算时间。故很少应用于全弹道计算, 仅用于研究初始扰动效应。

为节省计算时间而加大积分步长, 只当消除或替代角运动中的快频运动才有可能。若攻角使用动力平衡角即角运动的稳态解来代替, 便得到四自由度模型。它已被 NATO 采用作为射表生成的弹道计算模型, 计算速度很快, 其积分步长可达 1 秒甚至几秒, 且当攻角幅值较小时(3~5度), 它的计算结果与刚体六自由度的结果很接近。

四自由度旋转稳定弹道计算模型很早就被提出来了^[1]。Lieske(1966) 提出修正质点弹道方程^[2]以来, 关于 4DOF 弹道计算软件相继出现, 我国从 SRC 引进的程序 LOB^[3], LOBS^[4] 就是这样的商品软件。

LOB 中仅使用了简单的稳态平衡攻角公式来描述名义弹道计算中的攻角运动过程, 是复攻角微分方程的线性稳态解。

LOBS 修正了 LOB 中计算平衡攻角的公式, 使用较复杂的迭代并全部在地面坐标系中求解, 虽然加大了计算量, 但忠实地应用了 Lieske 提出的平衡攻角方程, 从而改善了计算精度。

祁载康(1987) 在 SRC 中仔细分析了 Lieske 平衡攻角公式中坐标系间的关系, 提出了求解 Lieske 平衡攻角方程的一个快速算法, 它比原 LOBS 快近 40%^[5]。

本文基于平衡攻角是复攻角运动微分方程的稳态解这一基本思想, 从一个考虑了所有可能对复攻角运动作贡献的因素的复攻角运动方程出发, 提出了一个新的快速 4DOF 模型, 它同样比 SRC 的 LOBS 快 40%。这在火控计算机的在线计算、射表编制等方面有应用价值。

1 复攻角运动微分方程

复攻角运动微分方程形式上与 C.H.Murphy 推导的方程相似^[1]。文献[6]中给出了详

尽的推导。其 s -域 (s 为弹道弧长) 表达形式为:

$$\tilde{\xi}'' + (H - iP)\tilde{\xi}' - (M + iPT)\tilde{\xi} = \tilde{D}_g \left(\frac{1}{u^2} \right) \quad (1)$$

上式的时间域表达式为

$$\ddot{\xi} + (A - iB)\dot{\xi} - (C + iD)\xi = \tilde{D}_g \quad (2)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} A = a_1 - b_3, & B = b_4 - a_2 \\ C = b_1 + a_1 b_3 - a_2 b_4, & D = b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{D}_g = (b_4 - ib_3)g \cos\theta_v/u \text{ 为重力驱动项} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_1 = QS\bar{C}_{L\alpha}/mu, & a_2 = QS\bar{C}_{yp\alpha}/mu \\ b_1 = QS\bar{I}\bar{C}_{m\alpha}/I_y, & b_2 = QS\bar{I}\bar{C}_{mp\alpha}/I_y \\ b_3 = QS\bar{I}\bar{C}_{m'q\alpha}/I_y, & b_4 = I_x p/I_y \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{上式中, } \begin{cases} \bar{C}_{L\alpha} = C_{L\alpha} + C_{L\alpha}^3 \cdot \alpha_T^2 \\ \bar{C}_{yp\alpha} = C_{yp\alpha} (pl/2v) \\ \bar{C}_{m\alpha} = C_{m\alpha} + C_{m\alpha}^3 \cdot \alpha_T^2 \\ \bar{C}_{m'q\alpha} = C_{m'q\alpha} (l/2v) \\ \bar{C}_{mp\alpha} = C_{mp\alpha} (pl/2v) \\ \bar{C}_d = C_{d0} + C_{d\alpha} \cdot \alpha_T^2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{注意到 } \begin{cases} (\dot{*}) = u(*)' \\ (*)' = (\ddot{*})/u^2 - (*)' \dot{u}/u^2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{则有 } \begin{cases} H = \bar{A}/u, & M = C/u^2 \\ P = B/u, & PT = D/u^2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} \bar{A} = \bar{a}_1 - b_3 \\ \bar{a}_1 = (QS/mu) [\bar{C}_{L\alpha} - \bar{C}_d - mg \sin\theta_v/QS] \end{cases} \quad (9)$$

2 弹道方程组

在地面坐标系 (ECS) 中建立弹运动的动力学方程^[3]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} = & -\frac{\rho S}{2m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \bar{C}_d + \frac{\rho S}{2m} v^2 \bar{C}_{L\alpha} \boldsymbol{\alpha}_e - \frac{\rho S}{2m} v C_{yp\alpha}^* (\boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{v}) \\ & + \mathbf{g} + \mathbf{V} + \mathbf{g}'' + \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $v = u - W$

$$C_{yp\alpha}^* = C_{yp\alpha} \left(-\frac{\rho l}{2v} \right) + C_{x\delta\alpha} \cdot \delta$$

如果考虑底部排气因素则 \bar{C}_d 中应加入底排减阻 $C_{dB}^{[1]}$ 。 α_e 是动力平衡角, 是稳态全攻角 α_T 在 ECS 中的投影 (参见图1, 图2)。

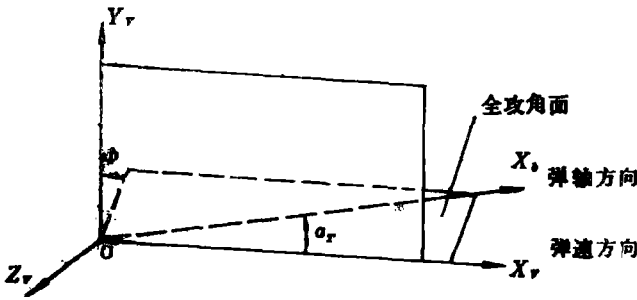


图1 全攻角定义及Phi角定义

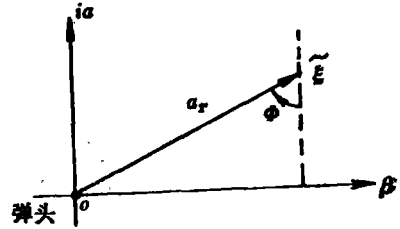


图2 复攻角平面

显然

$$\alpha_e = [\alpha_{ex}, \alpha_{ey}, \alpha_{ez}]^T = L_y(-\psi_v) L_z(-\theta_v) L_x(\Phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_T \quad (11)$$

由此得到

$$\begin{cases} \alpha_{ex} = (-\cos\psi_v \sin\theta_v \cos\Phi - \sin\psi_v \sin\Phi) a_T \\ \alpha_{ey} = (\cos\theta_v \cos\Phi) a_T \\ \alpha_{ez} = (\sin\psi_v \sin\theta_v \cos\Phi - \cos\psi_v \sin\Phi) a_T \end{cases} \quad (12)$$

其中,

$$\Phi = \text{tg}^{-1}(\beta/\alpha) \text{ 或 } \Phi = \text{sin}^{-1}(\alpha/\alpha_T) \quad (13)$$

为模型公式的完整性, 这里引用 (10) 式中地球作用力项的有关公式。重力加速度 g 的公式

$$g = \begin{bmatrix} -g_0^* \frac{x}{r_e} \left[1 - 3\frac{y}{r_e} - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{r_e} \right)^2 + 6 \left(\frac{y}{r_e} \right)^2 \right] \\ -g_0^* \left[1 - 2\frac{y}{r_e} - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{r_e} \right)^2 + 3 \left(\frac{y}{r_e} \right)^2 \right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$g_0^* = g_0 + r_e \Omega^2 \cos^2 L \quad (15)$$

$$g_0 = 9.817 [1 - 0.0026 \cos(2L)] \quad (\text{m/s}^2) \quad (16)$$

离心力加速度 g'' 公式

$$\mathbf{g}'' = \begin{pmatrix} r_e \Omega^2 \cos L \sin \lambda \cos \lambda \\ -r_e \Omega^2 \cos^2 L \\ -r_e \Omega^2 \sin L \cos L \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (17)$$

Coriolis 加速度 \mathbf{A} 的公式

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2\Omega u_y \cos L \sin \lambda \\ 2\Omega u_x \cos L \sin \lambda \\ 2\Omega u_x \sin L - 2\Omega u_y \cos L \end{pmatrix} \quad (18)$$

至此，将 (10) 式写成分量形式是不难的。

弹的转动方程为

$$\dot{p} = (C_{lp} pl/2v + C_{l\delta} \delta) QSl/I_x \quad (19)$$

以及弹的运动学方程为 (ECS 中)

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = \mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T \quad (20)$$

3 新的快速四自由度模型

四自由度模型的实质是将 (2) 式简化为一代数关系式，即忽略 $\ddot{\xi}$ 及 $\dot{\xi}$ ，仅考虑 (2) 式的稳态解 $\tilde{\xi}_0$ 。显然，

$$\tilde{\xi}_0 = -\tilde{D}_g / (C + iD) \quad (21)$$

积分 (10)，(19)，(20) 式就得到了 4 DOF 弹道诸元。

积分过程中需要解 (21) 式来得到攻角过程。由于 $\tilde{\xi}_0$ 实际上包含了与其模有关的非线性气动系数，所以 (21) 式为一非线性代数方程，可写作

$$\tilde{\xi}_0 = f(|\tilde{\xi}_0|) \quad (22)$$

一般要用迭代法来求取 $\tilde{\xi}_0$ 。幸运的是，仅使用简单迭代法，即用上一步积分的 $\tilde{\xi}_0$ 作为当前积分步中 (22) 式的迭代初值，会很快收敛到当前的 $\tilde{\xi}_0$ 值。实践证明，在给定的迭代出口精度下，如 10^{-7} 度，所需的计算花费是很小的，一般仅需几次迭代即可。从式 (22) 得到 $\tilde{\xi}_0$ 后，可得到 α_T, Φ ，代入 (12) 式即得到 α_e 。

本文所给出的 4 DOF 模型可以说是非常“精确”的 4 DOF 模型，它考虑了所有对平衡攻角 α_e 有影响的因素。计算表明，本文模型与 LOBS 精度相同，但比 LOBS 快 40%。

需要指出的是，如果积分 (10)，(19)，(20) 和 (2) 式就得到简化六自由度模型，它与刚体六自由度模型计算代价相当，但其结果是刚体六自由度模型结果的一个近似，一般仅在一些气动辨识问题上有应用。

4 结论

本文给出的旋转稳定弹道计算四自由度模型推导简捷。与 SRC 的 LOBS 相比,在计算 α_e 及其在 ECS 中的分量方面,本文 4D 要显著地简单。其计算量小、迭代简单。在同等精度下,本文 4D 与文献[5]的快速算法都比 LOBS 快 40% 左右。目前 LOBS 已安装了本文的快速 4D。这大大有利于快速射表生成、火控计算机的在线计算等方面的应用。

另外,通过对比,文献[5]比 LOB 多考虑了 Coriolis 加速度项及离心加速度项、Magnus 力系数项及 Magnus 力与 Magnus 力矩的交叉项。本文的模型多考虑了 Magnus 力与陀螺力矩的交叉项、Magnus 力与俯仰阻尼力矩交叉项以及升力与俯仰阻尼力矩交叉项。尽管这些项的影响是小的,但本文考虑的对 α_e 有影响的因素是全面的。

致谢:作者感谢祁载康教授的有力指导和 SRC 的友好支持,感谢杨志远高级工程师提出本论文的修订建议。

参 考 文 献

- [1] C.H.Murphy, Free Flight Motion of Symmetric Missiles. BRL Report No 1216, July, 1963.
- [2] Lieske, Equation of Motion For A Modified Point Mass Trajectory. BRL Report No 1314, Mar, 1966.
- [3] D.Lyster, Program 'LOB'. SRC - R - 104
- [4] D.Lyster, Program 'LOBS'. SRC - R - 109
- [5] Qi, Zai Kang (祁载康) and D.Lyster. A Fast Algorithm For Solving Lieske's Yaw of Repose Equation. SRC - TM - 87676, Sept, 1987
- [6] Qi, Zai Kang and Chen, Yang Quan (陈阳泉), A 5D Model For Calculating High Elevation Projectile Trajectory And An Accurate 4D Model. SRC - TM - 87677, sept, 1987.

A FAST 4-DOF MODEL FOR TRAJECTORY CALCULATION OF SPIN-STABILIZED PROJECTILES

Chen Yangquan

Abstract

A fast 4-DOF model for trajectory calculation of spin-stabilized projectiles is advanced in this paper. The yaw of repose α_e in 4-DOF model actually is the stable solution of a complex angle of attack differential equation. The new model proposed is just based on this basic idea, which can consider all facts that have contributions to α_e . The model in this paper is superior to that employed in program LOBS which was imported from SRC. The computation is 40% faster than that of LOBS, and the new model can be easily added to LOBS.

Key words: Trajectory calculation; Spin-stabilized projectile; Four degree of freedom model.