

旋转稳定弹道计算模型及软件研究(三)

一个新的无控旋转弹道计算刚体六自由度模型

陈阳泉

【摘要】提出了一个新的无控旋转弹道计算刚体六自由度模型(R6D),引入了全攻角空速坐标系(TAWCS)和全攻角弹体坐标系(TABCS),使大攻角气动力及力矩的投影关系得到准确刻画;给出了与四自由度模型(4D)所定义攻角的换算公式。本文的R6D已与SRC LOBS连接,共享其优点。本文的工作使得不同弹道模型之间真正具有了计算可比性,R6D成为一个考核标准。

【关键词】旋转稳定弹药 外弹道计算 模型 计算机程序

引言

无控旋转弹的弹道计算模型已经发展得比较完善^{[1]~[10]}。在不同的设计阶段或对于不同的研究目的,常常需要使用不同精度的弹道计算模型。不过,R6D总是需要的。问题是,R6D的结果与其它模型的计算结果要具有计算可比性才能使用R6D对其它模型进行校验、确定其精度范围、使用条件等。这种计算可比性是要求各弹道模型计算仅仅是使用的弹道模型或微分方程组右端函数方面有区别,其余一切情况如大气、地球引力、推力、气动力计算、积分及积分事件捕捉、弹道终止等模块是相同的,最好就使用同种模块。本文以SRC LOBS^{[3]、[4]}为基础,基于计算可比性的考虑,介绍LOBS中加入的R6D模型。R6D中引入全攻角空速坐标系(TAWCS)和全攻角弹体坐标系(TABCS),使空气动力和力矩得到准确描述。R6D中还可引入各种扰动,给出了换算成4D中攻角 α 、 β 的公式。本文在LOBS中加入的R6D可以成为具有计算可比性的考核标准模型。这对研究新的弹道模型或揭示不同模型之间的关系是有意义的^[8]。

1 坐标系定义及几何关系方程

R6D中定义了下述几种坐标系:

TAWCS: 全攻角空速坐标系;

TABCS: 全攻角弹体坐标系;

BCS: 弹体坐标系;

QBCS: 准弹体坐标系;

QWCS : 准空速坐标系;

ECS : 地面坐标系。

其中: ECS的准确定义是(ECS—A-X_eY_eZ_e);

A: 发射点;

A \vec{X}_e : 发射方向在水平面的投影, 指向发射方向为正;

A \vec{Y}_e : 过A点的地垂线, 向上为正方向;

A \vec{Z}_e : 由右手坐标准则确定。

BCS、QBACS的形象定义见文献^[1]。但是实际上, 没有必要象文献^[1]、^[14]等对每一种使用的坐标系进行形象化描述, 这里使用各坐标之间的转角关系图来描述, 见图1。其中

$$L_x(\alpha_x) = [\alpha_x]_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & \sin\alpha_x \\ 0 & -\sin\alpha_x & \cos\alpha_x \end{pmatrix}$$

$$L_y(\alpha_y) = [\alpha_y]_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y \end{pmatrix}$$

$$L_z(\alpha_z) = [\alpha_z]_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha_z & \sin\alpha_z & 0 \\ -\sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

显然 $L(\alpha) = L^T(-\alpha)$

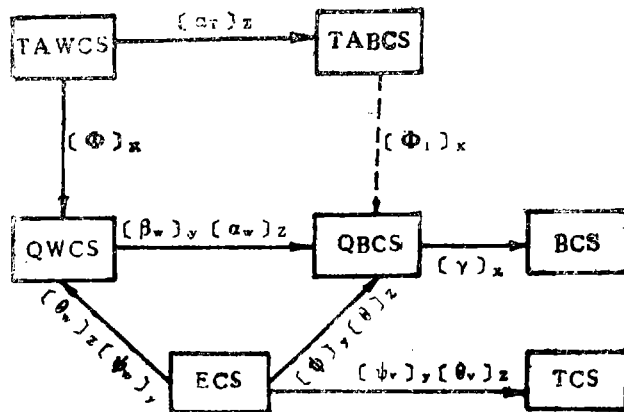


图1 R6D中坐标系转角关系图

图1中, ψ_w 、 θ_w 为弹相对风的速度 \vec{V} 的方向角, ψ_v 、 θ_v 为弹速度 \vec{u} 的方向角。在ECS中记 \vec{V} , \vec{u} 及风速 \vec{W} 分别为 $[V_x, V_y, V_z]^T$ 、 $[u_x, u_y, u_z]^T$ 及 $[W_x, W_y, W_z]^T$ 那么,
 $\vec{V} = \vec{u} - \vec{W}$ 在ECS中表示为:

$$[V_x, V_y, V_z]^T = [u_x - W_x, u_y - W_y, u_z - W_z]^T \quad (1)$$

则有

$$\psi_w = -\text{tg}^{-1}(V_z/V_x), \theta_w = \text{tg}^{-1}(V_y/(V_x^2 + V_z^2)^{\frac{1}{2}})$$

及

$$\psi_v = -\text{tg}^{-1}(u_z/u_x), \theta_v = \text{tg}^{-1}(u_y/(u_x^2 + u_z^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (2)$$

ψ 、 θ 、 γ 为弹体相对ECS的姿态角。图1中, 视 ψ_w 、 θ_w 、 ψ 、 θ 为独立角, 那么 Φ 、 α_T 、 β_w 、 α_w 均可由这四个独立角从几何关系方程得到。 α_T 为全攻角, 总为正值, Φ 为全攻角平面转动角度。这里的几何关系方程由一个计算机程序自动推导得到^[13], 下列(3)、(4)式就是计算机推导的结果。

$$\begin{cases} \alpha_w = \sin^{-1}\{[\sin\theta\cos\theta_w\cos(\psi - \psi_w) - \sin\theta_w\cos\theta]/\cos\beta_w\} \\ \beta_w = \sin^{-1}[\cos\theta_w\sin(\psi - \psi_w)] \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \cos\alpha_T = \cos\alpha_w \cdot \cos\beta_w \\ \sin\Phi = \cos\alpha_w \cdot \sin\beta_w/\sin\alpha_T \\ \cos\Phi = \sin\alpha_w/\sin\alpha_T \end{cases} \quad (4)$$

(4)式中为避免数值病态, 应使用

$$\alpha_T = \sin^{-1}[(\sin^2\alpha_w + \sin^2\beta_w - \sin^2\alpha_w \cdot \sin^2\beta_w)^{\frac{1}{2}}] \quad (5)$$

参见4D中 α 、 β 的定义^[3,4,6,8], 此时显然

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_T \cos\Phi \\ \beta = \alpha_T \sin\Phi \end{cases} \quad (6)$$

图1中定义了TAWCS及TABCS, 这是由于气动系数通常都是在全攻角面上给出的, 为了准确反映较大攻角运动时的气动力投影关系, 应将气动力以及力矩在全攻角面上计算出来, 然后使用 α_T 、 Φ 的关系进行投影。当然, 当 α_T 较小时可以近似地将全攻角面上给出的气动系数同用于纵向和侧向面, 实际上, 这是作了 $\alpha_T^2 = \alpha_w^2 + \beta_w^2$ 的假设, 见式(5)。

2 R6D弹道方程

在ECS中建立弹的质心运动学及动力学方程,

$$\begin{cases} du_x/dt = \sum_i F_{x_{e,i}}/m \\ du_y/dt = \sum_i F_{y_{e,i}}/m \\ du_z/dt = \sum_i F_{z_{e,i}}/m \end{cases} \quad (7)$$

$$[dx_e/dt, dy_e/dt, dz_e/dt]^T = [u_x, u_y, u_z]^T \quad (8)$$

其中

$$[\sum_i F_{x_{e,i}}, \sum_i F_{y_{e,i}}, \sum_i F_{z_{e,i}}]^T$$

为弹所受合力在ECS中的分量, m 为弹的质量, $[x_e, y_e, z_e]^T$ 为弹位置在ECS中的分量。

记 $\vec{\omega}$ 为BCS相对于ECS的转动角速度, $\vec{\omega}_q$ 为QBCS相对ECS的转动角速度, 记

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T, \text{ 则 } \vec{\omega}_q = (\omega_x - \dot{\gamma}, \omega_y, \omega_z)^T \quad (9)$$

在QBCS中,

$$d\vec{H}/dt + \vec{\omega}_q \times \vec{H} = \sum_i \vec{M}_i \quad (10)$$

其中, 角动量

$$\vec{H} = (I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z)^T$$

$\sum_i \vec{M}_i$ 为弹所受合力矩向量

通常对于轴对称弹, $I_y = I_z$, 所以绕质心运动动力学方程为

$$\begin{cases} d\omega_x/dt = \sum_i M_{x_i}/I_x \\ d\omega_y/dt = [\sum_i M_{y_i} - I_x \omega_x \omega_z + I_y (\omega_x - \dot{\gamma}) \omega_z]/I_y \\ d\omega_z/dt = [\sum_i M_{z_i} + I_x \omega_x \omega_y - I_y (\omega_x - \dot{\gamma}) \omega_y]/I_y \end{cases} \quad (11)$$

由于

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = L_z(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (12)$$

所以, 弹绕质心运动的运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \omega_x - \operatorname{tg}\theta \cdot \omega_y \\ \dot{\psi} = \omega_y / \cos\theta \\ \dot{\theta} = \omega_z \end{cases} \quad (13)$$

以上由式(7)、(8)、(11)及式(13), 共12个一阶微分方程。这就是 R6D 弹道方程。当弹有底部排气或火箭喷推时, 还应有第13个微分方程

$$dm/dt = -m_0 \quad (14)$$

其中, m_0 为秒流量。

3 作用于弹上的力和力矩及其投影

空气动力在 TAWCS 中定义

$$\vec{F}_a = \begin{pmatrix} -Q_s \cdot (C_{d0} + C_{da} \cdot \alpha_T^2) \\ Q_s \cdot (CL_a \cdot \alpha_T + CL_{a3} \cdot \alpha_T^3) \\ Q_s \cdot (C_{ypa} \cdot pl/2v) \alpha_T \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中, Q_s : 动压头, $Q = \frac{1}{2} \rho v^2$;

ρ : 空气密度;

s, l : 弹的参考面积和参考长度, $s = (\pi/4)l^2$;

$v = \|\vec{v}\|$: 弹相对风的速度;

$p = \dot{\gamma}$: 弹的转速;

C_{d0} : 零攻角阻力系数;

C_{da} : 攻角诱导阻力系数;

CL_a : 线性升力系数;

CL_{a3} : 立方升力系数;

$C_{y\beta\alpha}$: 马格努斯力系数。

空气动力矩部分定义在TAWCS中 (\vec{M}_{a2})，部分仍定义在QBCS中 (\vec{M}_{a1})，

$$\vec{M}_{a1} = \begin{pmatrix} QsI \ C_{lp} \ (\rho l/2v) \\ QsI \ C_{mq\alpha} \ (\omega_y l/2v) \\ QsI \ C_{mq\alpha} \ (\omega_z l/2v) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\vec{M}_{a2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -QsI \ C_{m\beta\alpha} \ (\rho l/2v) \cdot \alpha_T \\ QsI \ (C_{m\alpha} \cdot \alpha_T + C_{m\alpha^3} \cdot \alpha_T^3) \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中, C_{lp} : 滚转阻尼力矩系数;

$C_{m\beta\alpha}$: 马格努斯力矩系数;

$C_{m\alpha}$: 线性翻转力矩系数;

$C_{m\alpha^3}$: 立方翻转力矩系数;

$C_{mq\alpha}$: 俯仰阻尼力矩系数。

当计及弹的无控小舵的效应时, C_{lp} 、 $C_{y\beta\alpha}$ 、 $C_{m\beta\alpha}$ 分别应修正为:

$$\begin{cases} C_{lp}^* = C_{lp} + C_{l\delta} \cdot \delta / (\rho l/2v) \\ C_{y\beta\alpha}^* = C_{y\beta\alpha} + C_{y\delta\alpha} \cdot \delta / (\rho l/2v) \\ C_{m\beta\alpha}^* = C_{m\beta\alpha} + C_{m\beta\delta} \cdot \delta / (\rho l/2v) \end{cases} \quad (18)$$

上式中, $C_{l\delta}$ 、 $C_{y\delta\alpha}$ 、 $C_{m\beta\delta}$ 为翼片诱导系数导数, δ 为翼片斜置角。

至此, 式(7)中的

$$\begin{pmatrix} \Sigma F_{x\sigma i} \\ \Sigma F_{y\sigma i} \\ \Sigma F_{z\sigma i} \end{pmatrix} = m (\vec{g}_\sigma + \vec{g}'' + \vec{\Lambda}) + L_y(-\psi) \cdot L_z(-\theta) \cdot L_x(-\gamma) \\ \cdot L_y(-\psi_p) \cdot L_z(-\theta_p) \begin{pmatrix} F_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_y(-\psi_w) \cdot L_z(-\theta_w) \\ \cdot L_x(\phi) \cdot \vec{F}_s \quad (19)$$

式中 ψ_p 、 θ_p 是推力 F_t 矢量在 BCS 中的方向角。如果推力作用点在 BCS 中的位置为

$$\vec{r}_t = (x_t, y_t, z_t)^T$$

那么, 推力偏心引起的力矩 \vec{M}_t 在 BCS 中写成

$$\vec{M}_t = \vec{r}_t \times \vec{F}_t = [F_{tz}Y_t - F_{ty}Z_t, F_{tx}Z_t - F_{tz}X_t, F_{ty}X_t - F_{tx}Y_t]^T \quad (20)$$

其中, \vec{F}_t 为推力在 BCS 中的投影,

$$\vec{F}_t = (F_{tx}, F_{ty}, F_{tz})^T = L_y(-\psi_p)L_z(-\theta_p) \begin{pmatrix} F_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

式(19)中, \vec{g}_0 : 重力加速度向量;

\vec{g}'' : 离心力加速度向量;

$\vec{\Lambda}$: 柯氏力加速度向量。

它们在 ECS 中的分量公式, 详见^[3,8]。

如果考虑底排减阻效应^[3] C_{d0} , 此时 F_a 的 x 方向 (\vec{V}) 分量应写作

$$F_{ax} = -Q_s (C_{d0} + C_{da} \cdot \alpha_T^2 - C_{dB}) \quad (22)$$

式(11)中的

$$\begin{pmatrix} \sum M_{xi} \\ \sum M_{yi} \\ \sum M_{zi} \end{pmatrix} = \vec{M}_{a1} + L_z(\alpha_w)L_y(\beta_w)L_x(\Phi)\vec{M}_{a2} + L_x(-\gamma)\vec{M}_t \quad (23)$$

至此, R6D 模型全部导出, 且考虑了推力偏心及无控翼片的影响。R6D 的优点在于能准确预测各种扰动的影响, 一般考虑的扰动量, 动不平衡因素、气动不对称、随机风等。本文的 R6D 可以方便地加入这些扰动源。限于篇幅, 本文这里从略, 详见参考文献^[2,8,9,15]。

4 初始扰动的变换

在 LOBS 中, 4D 以 K_{10} 、 K_{20} 来描述初始攻角扰动, 即初始攻角快频幅值和慢频幅值。由^[8,11], K_{10} 、 K_{20} 与复攻角 ξ_0 ($\xi_0 = i\alpha_0 + \beta_0$) 初始扰动具有换算关系。在 5D、5D₊ 及

6D、6D_m中，攻角初始扰动均以 α_0 、 β_0 输入^[8,10]，而在R6D中只能由 ψ_{w0} 、 θ_{w0} 、 θ_0 和 ψ_0 来描述。这里介绍已知 α_0 、 β_0 、 ψ_{w0} 、 θ_{w0} 来求取 θ_0 、 ψ_0 。由图1，不难得到

$$\begin{cases} \theta_0 = \sin^{-1} [\cos\alpha_{w0} \cdot \cos\beta_{w0} \cdot \sin\theta_{w0} + \sin\alpha_{w0} \cdot \cos\theta_{w0}] \\ \psi_0 = \sin^{-1} [\sin\beta_{w0} \cos\theta_{w0} \cos\psi_{w0} + \cos\beta_{w0} \sin\psi_{w0}] \end{cases} \quad (24)$$

由前面的几何关系方程

$$\begin{cases} \alpha_{T0} = (\alpha_0^2 + \beta_0^2)^{1/2} \\ \alpha_{w0} = \sin^{-1} (\alpha_0 \sin\alpha_{T0} / \alpha_{T0}) \\ \beta_{w0} = \sin^{-1} [(\beta_0 \sin\alpha_{T0} / \alpha_{T0}) / \cos(\alpha_{w0})] \end{cases} \quad (25)$$

由于R6D的角速度扰动是由 ω_{y0} 、 ω_{z0} 来输入的，它们与 $\dot{\alpha}_0$ 、 $\dot{\beta}_0$ 的关系是很复杂的。假设角速度扰动时没有攻角扰动，此时

$$\alpha_0 = \theta_0 - \theta_{w0} = 0, \beta_0 = \psi_0 - \psi_{w0} = 0$$

那么， $\dot{\alpha}_0 = \dot{\theta}_0$ ， $\dot{\beta}_0 = \dot{\psi}_0$ ，此时

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \omega_{z0} \\ \dot{\beta}_0 = \omega_{y0} / \cos\theta_0 \end{cases} \quad (26)$$

如果攻角扰动与角速度扰动同时存在，式(26)将变得非常复杂。但由图1总能推导得到。

5 算例

5.1 以SRC 155mm ERFB MK10 MOD 2 弹， $V_0 = 795\text{m/s}$ 、 $\theta_E = 72^\circ$ 为例，计算无扰动名义弹道。表1给出了不同弹道模型的计算结果及CPU机时的对比。使用的程序

表 1 $V_0 = 795\text{m/s}$ 、 $\theta_E = 72^\circ$ 不同模型名义弹道计算结果

	R 6 D	5 D	6 D	5D _m	4 D
射程 (m)	15889	15930 (+41)	15928 (+39)	15884 (-5)	15903 (+14)
射偏 (m)	1527	1508 (-19)	1508 (-19)	1514 (-13)	1623 (+96)
CPU (sec)	10284	1523.6	7725.0	91 *	17.3

*)注：为自适应步长计算，其余为定步长。计算在IBM/PC-XT上进行，有8087。

D456R6以LOBS为基础,加入了多种弹道模型,已经精心考虑了计算可比性问题。

5.2 弹型同5.1, $V_0 = 897 \text{ m/s}$, $\theta_E = 45^\circ$ 。图2是以 $I_{xy} = 4000 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ 描述的动不平衡影响下,速度偏角 $\psi_v - t$ 曲线。图3是 $I_{xy} = 4000 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ 动不平衡的等效初始角速度扰动 ($\omega_{y_0} = 0.5825 \text{ 转/秒}$) 加入结果。对比图2、图3,两者的结果几乎一样。这验证了^[2,8]的结论,即能够形成高频干扰力矩的外加干扰(如动不平衡、推力偏心等与弹体一起高速旋转的这类干扰)都可能被一起始角速度扰动来等效。具体的等效公式见^[2]。

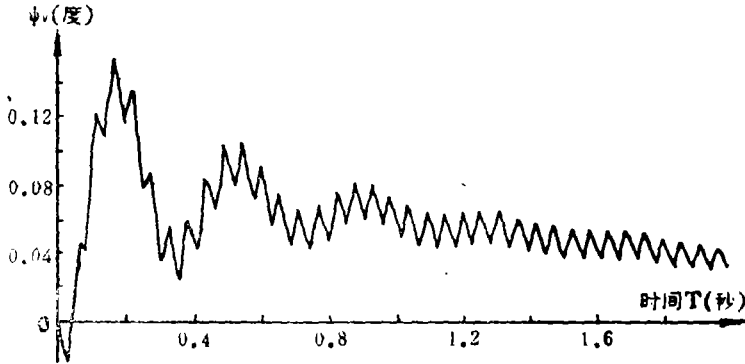


图2 $\psi_v - T$ 曲线 (动不平衡 $I_{xy} = 4000 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$)

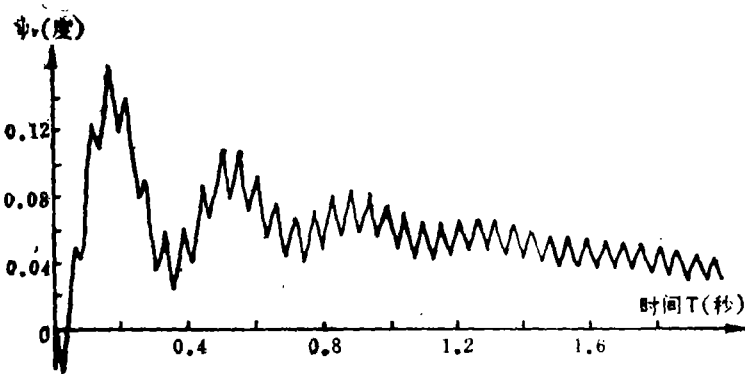


图3 $\psi_v - T$ 曲线 (起始角速度扰动 $\omega_{y_0} = 0.5825 \text{ 转/秒}$)

6 结论

本文从计算可比性的角度提出了一个新的刚体六自由度弹道计算的模型。引进了两个新的坐标系TAWCS和TABCS准确刻划了大攻角时的气动力及力矩的投影关系。R6D与LOBS联接,同享其优点,还给出了攻角扰动的换算公式及不同定义下攻角的变换关系式。这些使得本文的工作能够在研究新的弹道模型或不同弹道模型间的关系等方面发挥优点。本文的R6D可成为一个考核标准模型。它本身在研究扰动等方面也具有实用价值。

致谢:作者感谢祁载康教授的有力指导,本文的大部分工作得到过SRC的资助。

参 考 文 献

- [1] 林瑞雄、张鸿端编著,《导弹飞行力学(上册)》,北京理工大学,1984年3月
- [2] 徐明友编著,《火箭外弹道学》,国防工业出版社,1979年
- [3] D·Lyster, Program LOB, SRC-R-104
- [4] D·Lyster, Program LOBS, SRC-R-109
- [5] Lieske, Equation of Motion for a Modified Point Mass Trajectory, BRL Report № 1314, Mar, 1966
- [6] C·H·Murphy, Free flight motion of symmetrical missiles, BRL Report № 1216, July, 1963
- [7] C·H·墨菲著,韩子鹏译,《对称发射体的自由飞行运动》,国防工业出版社,1984年3月
- [8] 陈阳泉,《飞行器仿真研究及靶道气动系数辨识》,北京理工大学硕士研究生论文,1988年4月
- [9] Qi, Zai-kang (祁载康) and Chen, Yang-Quan (陈阳泉), A Six degree of freedom projectile model and program LOB6, SRC-TM-87678, sept 1987
- [10] Qi, Zi-kang and Chen, Yang-Quan, A 5D model for calculating high elevation projectile trajectories and an accurate 4D model, SRC-TM-87677, Sept, 1987
- [11] Qi, Zai-kang and Chen, Yang-Quan, Initial disturbance and dynamic imbalance effect, on projectile trajectory, SRC-TM-87679, oct, 1987
- [12] Qi, Zai-kang and D·Lyster, A fast algorithm for solving Lieskes yaw of repose equation, SRC-TM-87676, sept, 1987
- [13] 陈阳泉,《坐标系转换矩阵与几何关系方程式的推导程序》,西安工业学院学报, Vol.9, №3
- [14] 扬鑫声,《旋转有翼飞行器的散布模型》,电子技术与系统工程,1982年6月
- [15] 刘中淳,《炮射导弹和炮弹弹道仿真软件的开发和靶场雷达数据处理》,北京理工大学硕士研究生论文,1987年4月