DOI:10.16185/j.jxatu.edu.cn.1991.04.002

第11卷 第4期　　西 安 工 业 学 院 学 报　　Vol.11 No.4
1991年10月　JOURNAL OF XIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY　Oct. 1991

多延时时变系统的Taylor级数分析

陈阳泉　　　窦惠芳
（计算机控制教研室）　（机械电子教研室）

摘　要

研究了用Toylor级数对多延时时变系统的近似求解。通过使用延时、乘积及积分运算矩阵，将系统求解简化为解一组联立方程组，为多延时时变系统的分析与设计提供了又一条途径。所给出的算法适合计算机实现。文中的算例验证了本文方法的有效性。

关 键 词： 延时；系统分析；多延时时变系统；Taylor级数分析。
中图分类号： TP271.72

引　言

自Chen和Hsiao(1975)首次使用Walsh函数及其延时、积分运算矩阵求解延时微分方程以来，使用函数序列研究单延时和多延时系统引起了广泛的注意。研究者都是使用延时与积分运算矩阵将延时微分方程变换为代数方程求解来实现的。例如，Shih等人(1980)及Chen和Meng(1982)使用块脉冲函数、Hwang和Chen(1985)及Chang和Wang(1985)使用移位Legendre多项式分析了延时系统。Chen(1982)使用Walsh级数分析了时不变多延时系统，Chung和Sun(1987)使用单位阶跃函数分析了多延时系统。

Taylor级数虽不是正交函数类，但可用来分析各种系统。Yang和Chen(1987)使用Taylor级数分析了延时系统；Mohsen Razzaghi和Mehdi Razzaghi(1989)首次使用Taylor级数分析了一类简单的时变系数多延时系统。尽管Mohsen Razzaghi和Mehdi Razzaghi(1989)文中的两个单维情形的算例是正确的，但该文的很多推导是基于错误的乘积运算矩阵。本文首次给出了正确的乘积运算矩阵，并考虑了更广泛的一类多延时时变系统。应用乘积运算矩阵及延时、积分运算矩阵，将多延时时变系统转化为一组代数方程组。给出的算法易于计算实现。文中给出了一个数值算例与真实解的比较，证实了本文方法的正确性和有效性。

1991-06-25 收到

1　Taylor 级数运算矩阵

一个 $p-1$ 阶可微函数 $f(t)$ 的 p 项 Maclaurin 级数记为

$$f(t)\approx\sum_{i=0}^{p-1} c_i T_i(t) = C^T T(t) \tag{1}$$

其中　$T_i(t)=t^i$，　　$c_i=\frac{1}{i!}\left[f^{(i)}(t)\right]\Big|_{t=0}$，

$$C^T=[c_0,c_1,\cdots,c_{p-1}],\qquad T^T(t)=[T_0(t),T_1(t),\cdots,T_{p-1}(t)].$$

$\forall a\in \mathrm{R}$，忽略 t^p/p 项，当 p 较大且 $t\in[0,1]$ 时下式是合理的。

$$\int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\approx Q(a)T(t) \tag{2}$$

其中，$Q(a)\in \mathrm{R}^{p\times p}$，称为 Taylor 级数基函数 $T(t)$ 的积分运算矩阵。$Q(a)$ 的 i 行 j 列元素 $[Q(a)]_{i,j}$ 为

$$[Q(a)]_{i,j}=\begin{cases}1/i, & i=j-1;\\ -a^i/i, & j=1;\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,p) \tag{3}$$

显然，$\det Q(a)=-a^p/p!$，只要 $a\neq 0$，$Q(a)$ 可逆。

为清晰起见，下面的讨论中已隐含(2)式的近似。当 $t>1$ 时，可作归一化变换使 $t\in[0,1]$。

注意到

$$(t-\tau)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}t^i\tau^{n-i} \tag{4}$$

那么

$$T(t-\tau)=S(\tau)T(t) \tag{5}$$

其中，$S(\tau)\in \mathrm{R}^{p\times p}$ 矩阵，称为 $T(t)$ 的延时运算矩阵。且

$$[S(\tau)]_{i,j}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}(-\tau)^{i-j}, & j\leqslant i;\\ 0, & j>i.\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,p) \tag{6}$$

$S(\tau)$ 为下三角矩阵。显然 $S(0)=I_p$ 为 p 阶单位阵。

由于

$$T_i(t)T_j(t)=T_{i+j}(t) \tag{7}$$

并注意到 Taylor 展开仅取前 p 项，此时规定 $T_{i+j}(t)\equiv 0$，当 $i+j\geqslant p$。那么

$$C^T T(t)T^T(t)=T^T(t)\tilde{C} \tag{8}$$

其中，$\tilde{C}\in \mathrm{R}^{p\times p}$ 为 $T(t)$ 关于函数 $C^T=[c_0,c_1,\cdots,c_{p-1}]$ 的乘积运算矩阵且

$$[\tilde{C}]_{i,j}=\begin{cases}c_{i-j}, & i\geqslant j;\\ 0, & i<j.\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,p) \tag{9}$$

显然 $\tilde{C}$ 是一个下三角矩阵。

记
$$\hat{T}_n(t)=I_n\otimes T(t) \qquad \in R^{np\times n} \tag{10}$$

$$\hat{T}_n^T(t)=I_n\otimes T^T(t) \qquad \in R^{n\times np} \tag{11}$$

$$\hat{Q}_n^T(\alpha)=I_n\otimes Q^T(\alpha) \qquad \in R^{np\times np} \tag{12}$$

$$\hat{S}_n^T(\tau)=I_n\otimes S^T(\tau) \qquad \in R^{np\times np} \tag{13}$$

那么我们有

$$\int_a^t \hat{T}_n^T(\tau)\mathrm{d}\tau=\hat{T}_n^T(t)\ \hat{Q}_n^T(\alpha) \tag{14}$$

$$\hat{T}_n^T(t-\tau)=I_n\otimes(T^T(t)\ S^T(\tau))=\hat{T}_n^T(t)\ \hat{S}_n^T(\tau) \tag{15}$$

其中⊗表示矩阵直积（Kronecker 积），即对于

$$A\in R^{p\times q},\ B\in R^{r\times s}$$

则
$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pq}B \end{pmatrix} \quad \in R^{pr\times qs} \tag{16}$$

$\hat{Q}_n^T(\alpha)$ 为 $\hat{T}_n^T(t)$ 的积分运算矩阵，$\hat{S}^T(\tau)$ 为 $\hat{T}_n^T(t)$ 的延时运算矩阵。

设 $A=[A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m]$, $A_j\in R^{n\times p}$ $(j=1,2,\cdots,m)$

那么 $$[A_1,\ A_2,\ \cdots,A_m]\ \hat{T}_m(t)\ \hat{T}_m^T(t)=\hat{T}_n^T(t)\tilde{A} \tag{17}$$

其中 $\tilde{A}\in R^{np\times mp}$ 称为 $\hat{T}_m(t)$ 关于 A 的乘积运算矩阵。

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \cdots & \tilde{A}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{n1} & \cdots & \tilde{A}_{nm} \end{pmatrix} \tag{18}$$

其中 $\tilde{A}_{ij}\in R^{p\times p}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$ 是 $T(t)$ 关于向量 $[a_{i0}^{(j)},a_{i1}^{(j)},\cdots,a_{i(p-1)}^{(j)}]^T$ 的乘积运算矩阵。$\tilde{A}_{ij}$ 为下三角阵。此处 $a_{ik}^{(j)}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,\cdots,p-1)$ 是 A_j 的第 i 行第 k 列的元素。

2 多延时时变系统分析

考虑下面的多延时时变系统：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{X}(t)=\sum_{j=0}^{n_x}A_j(t)X(t-\tau_{xj})+\sum_{j=0}^{n_u}B_j(t)U(t-\tau_{uj}) \\ &X(t)=F(t),\ t<0;\ U(t)=G(t),\ t<0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

其中，$X(t)\in R^{n\times 1}$ 且 $X(0)$ 已知；$U(t)\in R^{m\times 1}$；$A_j(t)$，$B_j(t)$ 分别为 $n\times n$，$n\times m$ 已知矩阵。

不失一般性，下面讨论中设 $n_x=n_u=r$。又设 $\tau_{xj}=\tau_{uj}=\tau_j$ 且 $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_r$。由于 $F(t)$，$G(t)$ 为已知函数，将其 Taylor 展开至 p 项，记

$$F(t-\tau_j)=\widehat{T}_n^T(t)[R_{j1}^T,\ R_{j2}^T,\cdots,\ R_{jn}^T]^T \qquad (j=1,2,\cdots,r) \tag{20}$$

$$G(t-\tau_j)=\widehat{T}_m^T(t)[S_{j1}^T,\ S_{j2}^T,\cdots,S_{jm}^T]^T \qquad (j=1,2,\cdots,r) \tag{21}$$

其中 $R_{jk}(k=1,2,\cdots,n)$，$S_{jk}(k=1,2,\cdots,m)$ 均为 $p\times 1$ 已知展开系数阵。

记

$$V_j=\int_0^{\tau_j}A_j(t)F(t-\tau_j)\mathrm{d}t \qquad (j=1,2,\cdots,r) \tag{22}$$

$$W_j=\int_0^{\tau_j}B_j(t)G(t-\tau_j)\mathrm{d}t \qquad (j=1,2,\cdots,r) \tag{23}$$

其中 V_j，W_j 均为 $n\times 1$ 矩阵，可由适当的积分方法获得。

现将 $X(t)$，$U(t)$，$A_j(t)$，$B_j(t)$ 按 Taylor 展开至 p 项如下：

$$X(t)=\widehat{T}_n^T(t)[X_1^T,\ X_2^T,\ \cdots,\ X_n^T]^T \tag{24}$$

$$U(t)=\widehat{T}_m^T(t)[U_1^T,\ U_2^T,\ \cdots,\ U_m^T]^T \tag{25}$$

$$A_j(t)=[A_{j1},\ A_{j2},\ \cdots,\ A_{jn}]\widehat{T}_n(t) \tag{26}$$

$$B_j(t)=[B_{j1},\ B_{j2},\ \cdots,\ B_{jm}]\widehat{T}_m(t) \tag{27}$$

其中 $X_l^T=[x_{l0},\ x_{l1},\cdots,\ x_{l(p-1)}]$ $(l=1,2,\cdots,n)$ 为 $1\times p$ 待定展开式系数阵；而矩阵 $U_l^T=[u_{l0},\ u_{l1},\ \cdots,\ u_{l(p-1)}]$ 和 B_{jl} $(l=1,2,\cdots,m)$ 分别为 $1\times p$，$n\times p$ 已知展开系数阵；A_{jl} $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为 $n\times p$ 已知展开系数阵。

引入 $\widehat{T}_n^*$ 变换矩阵使

$$\widehat{T}_n^T(t)\,T_n^*=I_n \tag{28}$$

那么，$\widehat{T}_n^*=[(T_{n1}^*)^T,(T_{n2}^*)^T,\cdots,(T_{nn}^*)^T]^T$ 中 $T_{nj}^*\in R^{p\times n}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 的第 i 行第 k 列的元素 $[T_{nj}^*]_{i,k}$ 为

$$[T_{nj}^*]_{i,k}=\begin{cases}1, & i=1,\ k=j;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,p;\ k=1,2,\cdots,n) \tag{29}$$

这样，任一 $n\times 1$ 已知向量如 $X(0)$，可写作

$$X(0)=\widehat{T}_n^T(t)(\widehat{T}_n^*\ X(0)) \tag{30}$$

当 $t>\tau_j$ 时，结合 (22)～(27)式及(14)～(18)式，有

$$A_j(t)X(t-\tau_j)=[\ A_{j1},A_{j2},\cdots,A_{jn}]\widehat{T}_n(t)\widehat{T}_n^T(t-\tau_j)[X_1^T,\ X_2^T,\ \cdots,\ X_n^T]^T$$

$$= \widehat{T}_n^T(t)\widetilde{A}_j S_n^T(\tau_j)[X_1^T, X_2^T, \cdots, X_n^T]^T \quad (31)$$

其中 $\widetilde{A}_j$ 是 $\widehat{T}_n(t)$ 关于 $[A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{jn}]$ 的乘积运算矩阵。

$$\int_0^t A_j(\tau)X(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau = \int_0^{\tau_j} A_j(\tau)F(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau + \int_{\tau_j}^t A_j(\tau)X(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau$$

$$= V_j + \widehat{T}_n^T(t)\widehat{Q}_n^T(\tau_j)\widetilde{A}_j\widehat{S}_n^T(\tau_j)[X_1^T, X_2^T, \cdots, X_n^T]^T \quad (32)$$

类似地，

$$B_j(t)U(t-\tau_j) = \widehat{T}_n^T(t)\widetilde{B}_j\widehat{S}_m^T(\tau_j)[U_1^T, U_2^T, \cdots, U_m^T]^T \quad (33)$$

$$\int_0^t B_j(\tau)U(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau = W_j + \widehat{T}_n^T(t)\widehat{Q}_n^T(\tau_j)\widetilde{B}_j\widehat{S}_m^T(\tau_j)[U_1^T, U_2^T, \cdots, U_m^T]^T \quad (34)$$

其中 $\widetilde{B}_j$ 是 $\widehat{T}_m(t)$ 关于 $[B_{j1}, B_{j2}, \cdots, B_{jm}]$ 的乘积运算矩阵。

现将 (19) 式两边积分得

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sum_{j=0}^r A_j(\tau)X(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau + \int_0^t \sum_{j=0}^r B_j(\tau)U(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau \quad (35)$$

对于 $t \in [\tau_q, \tau_{q+1}]$ $(q=0,1,\cdots,r)$，记

$$X^{(q)} = [X_1^T, X_2^T, \cdots, X_n^T]^T \quad (36)$$

由(35)式，有

$$X(t) = X(0) + \sum_{j=0}^q \int_{\tau_j}^t A_j(\tau)X(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^q \int_0^{\tau_j} A_j(\tau)F(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau$$

$$+ \sum_{j=q+1}^r \int_0^t A_j(\tau)F(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau + \sum_{j=0}^q \int_{\tau_j}^t B_j(\tau)U(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau$$

$$+ \sum_{j=1}^q \int_0^{\tau_j} B_j(\tau)G(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau + \sum_{j=q+1}^r \int_0^t B_j(\tau)G(\tau-\tau_j)\mathrm{d}\tau \quad (37)$$

应用 (22)～(30)式，将 (37) 式写成

$$\widehat{T}_n^T(t)X^{(q)} = \widehat{T}_n^T(t)\widehat{T}_n^* X(0) + \widehat{T}_n^T(t)\sum_{j=0}^q \widehat{Q}_n^T(\tau_j)\widetilde{A}_j\widehat{S}_n^T(\tau_j)X^{(q)}$$

$$+ \widehat{T}_n^T(t)\sum_{j=1}^q \widehat{T}_n^* V_j + \widehat{T}_n^T(t)\sum_{j=q+1}^r \widehat{Q}_n^T(0)\widetilde{A}_j[R_{j1}^T, R_{j2}^T, \cdots, R_{jn}^T]^T$$

$$+ \widehat{T}_n^T(t)\sum_{j=0}^q \widehat{Q}_n^T(\tau_j)\widetilde{B}_j\widehat{S}_m^T(\tau_j)[U_1^T, U_2^T, \cdots, U_m^T]^T + \widehat{T}_n^T(t)\sum_{j=1}^q \widehat{T}_n^* W_j$$

$$+ \widehat{T}_n^T(t)\sum_{j=q+1}^r \widehat{Q}_n^T(0)\widetilde{B}_j[S_{j1}^T, S_{j2}^T, \cdots, S_{jm}^T]^T \quad (38)$$

从 (38) 式可知

$$X^{(q)} = [I_{np} - L^{(q)}]^{-1}P^{(q)} \quad (39)$$

其中

$$L^{(q)} = \sum_{j=0}^q \widehat{Q}_n^T(\tau_j)\widetilde{A}_j\widehat{S}_n^T(\tau_j) \quad (40)$$

$$P^{(q)}=\widehat{T}_n^{*}\left[X(0)+\sum_{j=1}^{q}V_j+\sum_{j=1}^{q}W_j\right]$$

$$+\widehat{Q}_n^T(0)\left(\sum_{j=q+1}^{r}\widetilde{A}_j[R_{j1}^T,R_{j2}^T,\cdots,R_{jn}^T]^T+\sum_{j=q+1}^{r}\widetilde{B}_j[S_{j1}^T,S_{j2}^T,\cdots,S_{jm}^T]^T\right)$$

$$+\sum_{j=0}^{q}\widehat{Q}_n^T(\tau_j)\widetilde{B}_j\widehat{S}_m^T(\tau_j)[U_1^T,U_2^T,\cdots,U_m^T]^T \tag{41}$$

至此，系统(19)的解可近似地由

$$X(t)=\widehat{T}_n^T(t)X^{(q)}\quad t\in[\tau_q,\tau_{q+1}],(q=0,1,\cdots r) \tag{42}$$

得到。

上述推导过程同样适合于 $\tau_{xj}\neq\tau_{uj}$ 的情形。

3 数值算例

考虑下面的系统

$$\dot{x}(t)=t\cdot x(t-0.4)+x(t-0.8)+u(t-\tau)$$

$$x(t)=0\quad t<0$$

$$u(t)=0\quad t<0$$

其中，$u(t)$ 为单位阶跃函数

取 $p=10$。当 $\tau=0$ 时，这正是文献[9]的例子。应用本文的(39)～(42)式得到附表。其中精确值是使用经本文作者改造后的ZFX[10]得到的。其详细的描述见文献[11]。

附表 Taylor级数近似解与精确解的结果对比

t	exact ($\tau=0$)	Taylor ($p=10$)	exact ($\tau=0.2$)	Taylor ($p=10$)
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.04	0.04000	0.04000	0.00000	0.00000
0.08	0.08000	0.08000	0.00000	0.00000
0.12	0.12000	0.12000	0.00000	0.00000
0.16	0.16000	0.16000	0.00000	0.00000
0.20	0.20000	0.20000	0.00000	0.00000
0.20	0.20000	0.20000	0.00000	0.00000
0.24	0.24000	0.24000	0.04000	0.03900
0.28	0.28000	0.28000	0.08000	0.07900
0.32	0.32000	0.32000	0.12000	0.11900
0.36	0.36000	0.36000	0.16000	0.15900
0.40	0.40000	0.40000	0.20000	0.19900
0.40	0.40000	0.40000	0.20000	0.19900
0.44	0.44034	0.44044	0.23900	0.23900
0.48	0.48145	0.48173	0.27900	0.27900
0.52	0.52346	0.52384	0.31900	0.31900
0.56	0.56649	0.56682	0.35900	0.35900
0.60	0.61067	0.61091	0.39900	0.39900
0.60	0.61067	0.61091	0.39900	0.39912
0.64	0.65613	0.65621	0.43948	0.43943
0.68	0.70300	0.70262	0.48104	0.48101
0.72	0.75141	0.75026	0.52382	0.52372
0.76	0.80148	0.79891	0.56794	0.56779
0.80	0.85334	0.84863	0.61353	0.61348
0.80	0.85334	0.84863	0.61353	0.61348
0.84	0.90792	0.90822	0.66072	0.66052
0.88	0.96618	0.96611	0.70964	0.70958
0.92	1.02827	1.02651	0.76041	0.76039
0.96	1.09437	1.08954	0.81316	0.81309
1.00	1.16464	1.15512	0.86802	0.86794

4 结论

本文应用Taylor级数及其乘积、延时和积分运算矩阵将多延时时变系统简化为一组联立方程组，使系统求解只需通过简单运算获得。Taylor级数方法的简单性及其运算矩阵的稀疏性使得这种方法特别适合于数字计算机求解，并能保证所需精度。本文为多延时时变系统的仿真设计、辩识确认等提供了一条新的途径。

参考文献

[1] Chen C F, Hsiao C H. IEEE: Transactions on Automatic Control, 1975,20: 596～603

[2] Shih Y P , Hwang C and Chia W K. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1980, 102: 159～162

[3] Chen W L, Meng C H. Computers and Electrical Engineering, 1982, 9: 153～166

[4] Hwang C, Chen M Y. International Journal of Control, 1985, 41: 403～415

[5] Chang R Y, Wang M L. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1985, 107: 79～85

[6] Chen W L. Journal of the Franklin Institute, 1982, 313: 207～217

[7] Chung H Y, Sun Y Y. Journal of the Franklin Institute, 1987, 324: 65～72

[8] Yang C Y,Chen C K. International Journal of System Science, 1987, 18: 1347～1353

[9] Mohse Razzaghi, Mehdi Razzaghi. International Journal of Control, 1989, 50: 183～192

[10] Ma Jihu. A Combined Continuous/Discrete Simulation Package ZFX and its Applications. Advance in Modelling & Simulation, 7(4): 44～55

[11] 王高亮. 通用系统仿真与优化软件研究与应用:[学位论文]. 西安: 西安工业学院电子工程系, 1991.

ANALYSIS OF MULTI-DELAY SYSTEMS WITH TIME-VARYING COEFFICIENTS BY TAYLOR SERIES

Chen Yangquan Dou Huifang

Abstract

The Taylor series method for approximately solving multi-delay systems with time-varying coefficients is reported. The method based on the truncated Taylor series and its operational matrices for multiplication, integration and delay simplifies the systems into a set of algebraic simultaneous equations. The correct multiplication operational matrix is derived for the first time in this paper. A wider class of time-varying multi-delay systems can be considered. The method is suitable for computer calculation and the effectiveness is demonstrated through an illustrative example. This paper gives another way for the analysis and design of time varying multi-delay systems.

Key words: delay; system analysis; multi-delay time varying systems; Taylor series analysis.