

一类跟踪最优控制问题的次优解法及其应用

窦惠芳

陈阳泉

(机械电子教研室) (电子工程系)

摘要 讨论了一类跟踪最优控制问题的次优解法.采用亏数为2的分段三次样条描述方案使泛函极小问题转化为多变量参数寻优问题.使用Newton-Raphson迭代方法并讨论了减少计算量的技术以及状态初值的修正方法.给出了一个来自实际的应用例,表明这种次优解法具有工程实用价值.

关键词 最佳控制 参数法 次最佳控制 数据精简 亏值

中图分类号 TP13 O232 O242.23

引言

最优控制理论目前已得到充分发展,然而这些应用数学的方法在实际中的应用仍不像人们期望的那样广泛.面向实际的工程师常常为时间所迫并不追求数学上的美感和对理论发展做出贡献的乐趣,他们偏爱有能很快付诸实践的哪怕是准最优的方法,本文对一类最优跟踪控制问题通过参数化描述方案,使泛函极小问题转化为多变量参数寻优问题,大大减少了解决问题所需要的理论背景.虽然本文的方法仍然属于Ritz解法的范畴,但使用的参数化描述方案更适合工程应用需要,并且使用了Newton-Raphson迭代及准Newton-Raphson迭代方法使收敛速度成为二阶的或近似二阶的,对于大多数的应用场合,初始控制是能够在可行范围内给出的.实践表明,本文的方法常常是有效的.

1 问题的提法和参量化描述方案

考虑最优跟踪控制问题(OTCP)

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (1)$$

$$J[U(t)] = \int_{t_0}^T L(X(t), U(t), t) dt \quad (2)$$

* 1993-09-24 收稿

其中,

$$X(t) \in R^n, U(t) \in R^m \quad (m < n)$$

$$L(X(t), U(t), t) = (X(t) - X_m(t))^T Q (X(t) - X_m(t))$$

$X_m(t)$ 为跟踪状态或已测量轨迹, $X_m(t) \in R^n$, Q 为权矩阵, 取 $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_n]$, t_0, t_f 给定, X_0 粗略或精确已知, 终端自由且 $X(t), U(t)$ 无约束.

为推导上的清晰性, 以下的讨论中假设控制为单维的, 这不失一般性. 将 $U(t)$ 以亏数为 2 的分段三次样条来表示, 即 $U(t)$ 为整体光滑的, 设 $U(t) (t \in [t_0, t_f])$ 分为 r 段, 有 $r+1$ 个分段节点, 记为 $t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_r < t_{r+1} = t_f$, 又设 t_i 结点处对应 $U(t)$ 的函数及导数值分别为 f_i 和 d_i , 考察 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 知由 $f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}$ 可唯一决定一个三次 Hermite 型多项式 $U_i(t)$, 可以表示为

$$\begin{aligned} U_i(t) &= [\gamma_1(\tau_i), \gamma_2(\tau_i), \gamma_3(\tau_i), \gamma_4(\tau_i)] [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^T \\ &= [a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}] [1, t, t^2, t^3]^T \\ &= [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}] [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3] \end{aligned} \tag{3}$$

其中, $\tau_i = (t - t_i) / h_i, h_i = t_{i+1} - t_i$, 显然 $\tau_i \in [0, 1]$. 容易得到

$$A_1 \cdot [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T = [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^T \tag{4}$$

其中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_i^{-1} & 2h_i^{-1} & 3h_i^{-1} \end{bmatrix}$$

且

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ -3 & -2h_i & 3 & -h_i \\ 2 & h_i & 2 & h_i \end{bmatrix}$$

那么

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(\tau_i) \\ \gamma_2(\tau_i) \\ \gamma_3(\tau_i) \\ P_4(\tau_i) \end{bmatrix} = [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3], \quad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 3\tau_i^2 + 2\tau_i^3 \\ h_i(\tau_i - 2\tau_i^2 + \tau_i^3) \\ 3\tau_i^2 - 2\tau_i^3 \\ h_i(-\tau_i^2 + \tau_i^3) \end{bmatrix} \tag{5}$$

以及

$$[\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T = A_2 [a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}]^T \tag{6}$$

其中,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \\ 0 & h_i & 2h_i t_i & 3h_i t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^2 & 3h_i^2 t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^3 \end{bmatrix}, \quad \text{且} \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -h_i^{-1}t_i & h_i^{-2}t_i^2 & -h_i^{-3}t_i^3 \\ 0 & h_i^{-1} & -2h_i^{-2}t_i & 3h_i^{-3}t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^{-2} & -3h_i^{-3}t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^{-3} \end{bmatrix}$$

不难看出, $U(t) \in C^1[t_0, t_f]$, 由于分段数 r 和分段节点 $t_i (i=1, 2, \dots, r+1)$ 由用户决定, $U(t)$ 的参量化描述的机动性得到保证. 记

$$c_{2i-1} = f_i, \quad c_{2i} = d_i, \quad (i = 1, 2, \dots, r+1) \quad C^T = [c_1, c_2, \dots, c_{2r+2}]$$

至此,OTCP 转化为多变量函数 $J[C]$ 极小问题

2 Newton-Raphson 迭代与准 Newton-Raphson 迭代

应用 Newton-Raphson 迭代就要求得到 $\frac{\partial J}{\partial c_i}$ 及 $\frac{\partial^2 J}{\partial c_i \partial c_j}$, 记 $q_i = \partial J / \partial c_i$, 其中, $i, j = 1, 2, \dots, 2r + 2$. OTCP 的 Hamilton 函数记作 $H(X, U, t)$, 简称为 H

$$H = L + \lambda^T f \tag{7}$$

其中, L 见(2)式, f 见(1)式, λ^T 为伴随向量, $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

根据最优控制中的最大值原理^[1]

$$\frac{\partial H}{\partial U(t)} = 0 \tag{8}$$

由(7)式知,即
$$\frac{\partial L}{\partial U(t)} = - \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial U(t)} \tag{9}$$

亦即,
$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = - \frac{\partial U(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial U(t)} dt \tag{10}$$

所以,
$$q_i = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial U(t)}{\partial c_i} \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial U(t)} dt \tag{11}$$

且
$$\frac{\partial q_i}{\partial c_j} = \frac{\partial^2 J}{\partial c_i \partial c_j} = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial U(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial}{\partial c_j} \left[\frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial U(t)} \right] dt \tag{12}$$

(12)式中包含了 $\frac{\partial X}{\partial c_j}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial c_j}$ 及 $\frac{\partial U(t)}{\partial c_j}$ 项.

(1)式两边对 c_j 求偏导得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X}{\partial c_j} \right) = \frac{\partial}{\partial c_j} f(X, U, t), \quad \frac{\partial X}{\partial c_j} \Big|_{t=t_0} = 0 \tag{13}$$

由终端自由,

$$\dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial X} = - \frac{\partial L}{\partial X} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial X}, \quad \lambda(t_f) = 0 \tag{14}$$

上式两边对 c_j 偏导得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial c_j} \right) &= - \frac{\partial}{\partial c_j} \left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) - \frac{\partial \lambda^T}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial X} - \lambda^T \frac{\partial}{\partial c_j} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial c_j} \Big|_{t=t_f} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

注意到 $\frac{\partial U(t)}{\partial c_j}$ 是一个类似门型的图像, 参见(3), (4)式知, $\frac{\partial U(t)}{\partial c_j}$ 只在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上不恒为零, 这里

$k = \lceil \frac{i+1}{2} \rceil$, $\lceil \cdot \rceil$ 表示取整操作, 且

$$\frac{\partial U(t)}{\partial c_j} = \begin{cases} 0, & t \in [t_k, t_{k+1}]; \\ \gamma_1(\tau_k), & t \in [t_k, t_{k+1}] \quad \text{且 } i \text{ 为奇数;} \\ \gamma_2(\tau_k), & t \in [t_k, t_{k+1}] \quad \text{且 } i \text{ 为偶数.} \end{cases} \tag{16}$$

至此,可应用 Newton-Raphson 迭代,即

$$C^{(k+1)} = C^{(k)} + \Delta C^{(k)} \tag{17}$$

$$A^{(k)} \cdot \Delta C^{(k)} = B^{(k)} \tag{18}$$

其中, k 为迭代次数, $\Delta C^{(k)}$ 为第 k 次迭代的优化参量的增量, 矩阵 $A^{(k)}, B^{(k)}$ 的元 a_{ij}, b_i 分别为

$$a_{ij} = \partial q / \partial c_j, \quad b_i = -q \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2r + 2) \quad (19)$$

算法的步骤是:

(1) 由 $C^{(k)}$ 参数表示的 $U(t)$ 及 X_0 , $\frac{\partial X}{\partial c_j} |_{t=t_0} = 0$; 从 t_0 至 t_f 共同正向积分(1)式, (13)式得到 $X(t)$ 及 $\frac{\partial X(t)}{\partial c_j}$;

(2) 由 $X(t)$, $\frac{\partial X(t)}{\partial c_j}$ 以及 $\frac{\partial \lambda}{\partial c_j} |_{t=t_f} = 0, \lambda(t_f) = 0$ 从 t_f 到 t_0 共同反向积分(14)式, (15)式得到 $\lambda(t)$ 及 $\frac{\partial \lambda(t)}{\partial c_j}$;

(3) 由(11)式, (12)式计算 q 及 $\frac{\partial q}{\partial c_j}$ 形成矩阵 $A^{(k)}, B^{(k)}$;

(4) 解线性方程组(18)得到 $\Delta C^{(k)}$, 由(17)式计算得到 $C^{(k+1)}$, 由此形成迭代直至指标 J 值不再明显减小为止。

需要注意, 对于(13)式, 由因果关系易知, 当 $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X}{\partial c_j} \right) = 0, \quad j = 2k + 3, 2k + 4, \dots, 2r + 2$. 而对于(15)式则正好相反, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial c_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2k - 2$.

正反向积分各需积 $(2r + 3)n$ 个微分方程. 当 r 较大时, 比较费时, 现在考虑使用准 Newton-Raphson 迭代以减小计算量.

将(2)式直接对 c_i 求偏导有

$$q = \frac{\partial J}{\partial c_i} = \int_{t_0}^{t_f} 2 \sum_{j=1}^n q_j (x_j(t) - x_{mj}(t)) \frac{\partial x_j(t)}{\partial c_i} dt \quad (20)$$

$$\frac{\partial q}{\partial c_j} = \int_{t_0}^{t_f} 2 \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial x_k(t)}{\partial c_j} \frac{\partial x_k(t)}{\partial c_i} dt \quad (21)$$

这样就可以避免了反向积分. 这就是准 Newton-Raphson 迭代或称为微分校正法^[2]. (21)式中忽略了 $\int_{t_0}^{t_f} 2 \sum_{k=1}^n q_k (x_k(t) - x_{mk}(t)) \frac{\partial^2 x_k(t)}{\partial c_j \partial c_i} dt$ 项, 当初值较合适且迭代收敛时, 该项的影响会越来越小, 越来越接近二阶收敛速度. 它比前述严格的 Newton-Raphson 迭代的迭代次数要略多而且对初值的要求更加严格, 但这种方法不要反向积分, 计算代价基本上降低了一半. 对于大多数的实际问题, 这种准 Newton-Raphson 迭代方法常常是有效的, 尽管数学上是不严格的^{[5][7]}.

3 X_0 的修正

一般的最优控制问题都认定状态初值 X_0 是精确已知的, 这并不符合某些实际问题的要求, 由于 X_0 的精度会直接影响最优解的精度, 所以在本文中 X_0 亦作为寻优参量是合理的. 这不仅扩张了寻优空间而且肯定使指标 J 值更小, 寻找最优的初值 X_0 在本文方法中是很容易实现的.

类似对 $2r + 2$ 个参数 c_i 的讨论, n 个初值参数 $x_{0i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 的偏导微分方程同(13)式, 但应注意微分方程的初值应为

$$\frac{\partial x_j(t)}{\partial x_{0i}} \Big|_{t=t_0} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (22)$$

如使用严格的 Newton-Raphson 迭代, $\frac{\partial \lambda}{\partial X_0}$ 的微分方程完全同(15)式.

4 实例

依据多普勒雷达测得的弹丸飞行径向速度 $v_{dm}(t)$ 要求得到弹丸飞行的符合阻力系数曲线 $C_{df}(t)$ 或 $C_{df}(M)$, M 为 Mach 数. C_{df} 是下述弹道方程(状态方程)意义下的最优符合阻力系数曲线.

$$\begin{cases} u_x = f_1(X, C_{df}) = -\rho(y)vs(u_x - w_x)C_{df}/2m \\ u_y = f_2(X, C_{df}) = -\rho(y)vsu_y/2m - g \\ x = f_3(X, C_{df}) = u_x \\ y = f_4(X, C_{df}) = u_y \end{cases} \quad (23)$$

其中, $X^T = [u_x, u_y, x, y]$, w_x 为 x 方向的程风速, m/s. $\rho(y)$ 为大气密度, v 为弹相对风的速度, m/s, $v = [(u_x - w_x)^2 + u_y^2]^{\frac{1}{2}}$

C_{df} 是基于(23)式的符合阻力系数曲线, 视作控制函数.

m 为弹丸质量;

s 弹丸的特征面积, 取 $s = \frac{\pi}{4}l^2$, l 为弹径;

g 为重力加速度, m/s².

在同一地面坐标系下, (x, y) 为弹丸位置, u_x, u_y 为弹丸切向速度 u 的 x, y 方向的分量, $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, 已知雷达的位置为 (x_r, y_r) , y_r 为负值. 初始状态 x_0, y_0 可精确已知, u_{x0}, u_{y0} 粗略已知, u 的径向意义上的值记作 v_d , 记

$$r_1 = x - x_r, \quad r_2 = y - y_r, \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

则 $v_d = (u_x r_1 + u_y r_2) / r$, 指标泛函为

$$J[C_{df}] = \int_{t_0}^{t_f} (v_d - v_{dm})^2 dt \quad (24)$$

显然这是一个奇异最优控制问题.

一组测量数据 $t_0 = 0.6s, t_f = 31.5s, 0.3s$ 等步距. $v_{dm}(t)$ 见图 1. 利用本文的拟 Newton-Raphson 迭代, u_{x0}, u_{y0} 作为优化参量, 将 t_0, t_f 分为 6 段, 节点为 0.6—8.1—15.0—20.1—25.2—28.2—31.5, 且 $c_{2n-1}^{(0)} = 0.3, c_{2n}^{(0)} = 0, (i=1, 2, \dots, 6)$, 即 $C_{df}^{(0)}(t) = 0.3$ 水平直线, 定义 $RMS = \sqrt{J / (t_f - t_0)}$

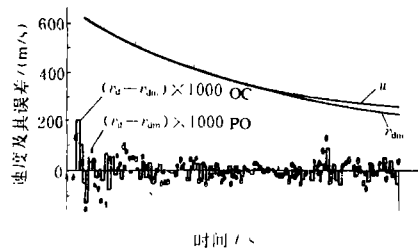


图 1 两种处理方法的误差对比

使用本文的参数化描述解法(记作 PO)及最优控制问题的共轭梯度数值解法(记作 OC)^[3]对结果作了对比, 见图 1~图 3. 图 1 是误差对比, 且

$$(\text{RMS})_{\infty} = 0.0915 \text{ m/s}, \quad (\text{RMS})_{\infty} = 0.04 \text{ m/s}$$

图2是 $C_{df}(t)$ 的曲线对比,图3是 $C_{df}(M)$ 的对比.

从结果可以看出本文方法的正确性,本文得到的 C_{df} 是一个次最优解,从实用角度而言,

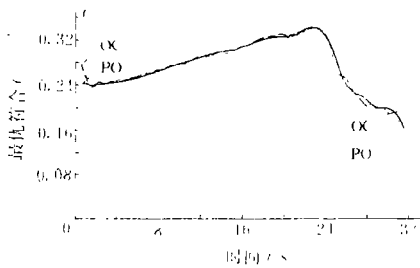


图2 两种处理方法的 $C_{df}(t)$ 曲线对比

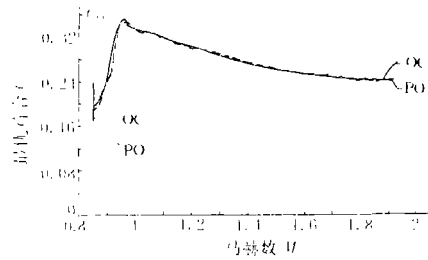


图3 两种处理方法的 $C_{df}(M)$ 曲线对比

本文方法可以直接得到 C_{df} 的分段多项式表示的各系数,便于投入使用.使用 OC 法得到的 C_{df} 不光滑,需经带约束的分段多项式拟合后再投入使用^[4].而且,由于是奇异最优控制问题,使用 ϵ -算法^[3]所需计算代价反而比本文方法要高.可以说,本文方法是解决一类奇异最优控制问题的有效算法.

5 结论

本文介绍的一类跟踪最优控制问题的次优解法基于亏数为2的分段三次多项式样条描述方案,使泛函极小问题转化成多变量参数寻优问题,使问题的解决简化、灵活.这种方法也可以解决一类其它形式的最优控制问题^[9].还可以在对系统和控制函数先验了解的基础上采取特定的参数化描述方案,使问题的解决更符合实际要求^[10].应用表明,本文方法是有吸引力的.

参 考 文 献

- 1 吴受章编著.应用最优控制.西安:西安交通大学出版社,1986年.
- 2 Chapman G T, Kirk D B. A method for extracting aerodynamic coefficients from free flight data. AIAA, 1970, 18(4)
- 3 叶庆凯,王肇明编著.优化与最优控制中的计算方法.北京:科学出版社,1986.
- 4 陈阳泉,窦惠芳.带约束多段多项式拟合算法及软件.气动实验与测量控制,1991(3)
- 5 Chen Yangquan et al. Optimal dynamic fitting and identification of aerobomb's fitting drag coefficient curve. Proc of the First IEEE Conf on Control Application. Dayton, Ohio, USA. Sept. 1992.
- 6 陈阳泉.非线性靶板数据处理.系统工程与电子技术,1991(3).
- 7 陈阳泉等.航弹符合阻力系数曲线的最佳动态拟合研究.西安工业学院学报,1992,12(2):8~16
- 8 陈阳泉,窦惠芳.从雷达测速数据辨识弹丸符合阻力系数曲线的最优控制解法研究.气动实

验与测量控制,1993,7(2):81~89

9 H G 雅可普著. 静态和动态系统的计算机辅助优化法. 邓建华译. 西安:西北工业大学出版社,1988.

10 邓建华. 辨识非线性曲线的非线性极大似然优化法. 控制理论与应用,1991,8(4)

Sub-optimal solution of a class of optimal tracking control problem and its application

Dou Hui Fang Chen Yangquan

Abstract

A sub-optimal solution of a class of optimal tracking control problem is proposed, which converts the functional minimization problem into multivariable parametric minimization problem by using a parameterization description of control function through cubic splines with deficiency number 2. Newton-Raphson iteration scheme is applied and the technique of reducing computation cost is discussed. Also, the correction of inaccurate initial states is introduced. A practical application example is given and the effectiveness of the method of present article is clearly shown.

Keywords: optimal control parameter optimization sub-optimal control
data reduction deficiency number

作者简介: 窦惠芳,女,29岁.机械电子教研室讲师.1985年7月毕业于武汉工业大学自动化系,1988年于北京理工大学自动控制系获工学硕士学位.主要从事机器人焊接焊缝激光-CCD自动跟踪系统、微机测控与通讯系统、细长轴磨削加工自适应控制和控制理论与应用等方面的工作.目前的研究兴趣为配液浓度过程自动控制和自适应超声手术仪研制等.

通讯地址: 710032 西安市金花北路
西安工业学院机械工程系机械电子教研室