北京理工大学学报
第10卷第S2期 J.BEIJING INST.TECHNOL. Vol.10 No.S2 1990

# 线性时不变奇异系统预解矩阵的计算方法

陈阳泉 孙明轩

（西安工业学院）

**摘 要** 文中提出了求解线性时不变奇异系统预解矩阵 $(Es-A)^{-1}$ 的几种计算方法。主要介绍了 $\det(Es-A)$ 多项式系数的几种求法以及由此系数得到矩阵多项式 $\mathrm{adj}(Es-A)$ 中系数矩阵的递推公式。文中介绍的算法可以考虑 $E$ 为奇异 $A$ 为准奇异以及 $E$、$A$ 皆为奇异的情形，并给出了算例。本文的工作为线性时不变奇异系统的研究提供了方便。

**关键词** 线性时不变奇异系统，预解矩阵，矩阵多项式，计算方法。

对于线性时不变奇异系统的状态方程

$$E\dot{X}=AX+BU \tag{1}$$

可设 $E$ 为 $n\times n$ 奇异阵，$A$ 为 $n\times n$ 方阵，$B$ 为 $n\times m$ 矩阵，并设初值为零经拉氏变换后有

$$X(s)=(Es-A)^{-1}\cdot BU(s) \tag{2}$$

可以看到，线性时不变系统状态方程求解的关键步骤是求系统的预解矩阵 $(Es-A)^{-1}$。当 $E$ 非奇异，可化为 $(sI_n-A)^{-1}$ 的形式。对此，著名的 Leveierr－Faddeeva 算法或称 Sourian－Frame 算法 [1] 提供了递推公式来得到 $(sI_n-A)^{-1}$ 的分母多项式 $\det(sI_n-A)$ 的系数以及 $(sI_n-A)^{-1}$ 的分子矩阵多项式 $\mathrm{adj}(sI_n-A)$ 的系数矩阵。当 $E$ 奇异时，文献〔2〕介绍了一种算法，它主要是经变量替换成为非奇异系统，再由 Leveierr－Faddeeva 算法求解，整个过程较繁杂且计算不方便。本文主要提出 $\det(Es-A)$ 多项式系数求取的几个算法。已知 $\det(Es-A)$ 时，$\mathrm{adj}(Es-A)$ 就可由一组递推关系式求得。这种方法适合计算机编程，简明实用。在线性时不变奇异系统的分析中有较大的应用价值。为方便，记

$$(Es-A)^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(Es-A)}{\det(Es-A)}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}P_k s^k}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k s^k} \tag{3}$$

1989年9月25日收稿

要求出$(Es-A)^{-1}$，实质上就是要找到决定$\alpha_k(k=0,1,\cdots,n)$以及$n\times n$方阵$P_k(k=0,1,\cdots,n-1)$的计算方法。

## 1 $\det(Es-A)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cdot s^k$中$\alpha_k$的计算方法

### 1.1 解线性方程组法

由$\det(Es-A)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k s^k$再令$s$取值$s_j$有

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k s_j^k=\det(Es_j-A), \qquad (j=0,1,\cdots,n)$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & \cdots & s_0^n \\ 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_n & s_n^2 & \cdots & s_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\det(Es_0-A)\\ \det(Es_1-A)\\ \vdots\\ \det(Es_n-A)\end{pmatrix} \tag{4}$$

其中$s_i(i=0,1,\cdots,n)$为$n+1$个互不相同的数。记

$$\det(Es_i-A)=d_i \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

当取$s_0=0$时，$\alpha_0=d_0=\det(-A)$则式(4)可写成

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{n-1} \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & s_n & s_n^2 & \cdots & s_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(d_1-d_0)/s_1\\ (d_2-d_0)/s_2\\ \vdots\\ (d_n-d_0)/s_n\end{pmatrix} \tag{5}$$

上式中要求 $s_j\neq 0$，$(j=1,2,\cdots,n)$。现记

$$V(s)=\begin{pmatrix} 1 & s_1 & \cdots & s_1^{n-1} \\ 1 & s_2 & \cdots & s_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_n & \cdots & s_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

为$s_1$，$s_2$，$\cdots$，$s_n$构成的Vondermonde矩阵。

文献〔3〕给出了$V^{-1}(s)$的元$u_{i,j}$的解析表达式

$$u_{i,j}=\sum_{l=0}^{n-i}d_l^* s_j^{\,n-l-i}u_{n,j} \tag{6}$$

$$u_{n,j}=\prod_{i=1,\ j\neq i}^{n}(s_j-s_i)^{-1} \tag{7}$$

其中 $d_l^*$ 为 $\prod_{l=0}^{n}(x-s_i)=0$ 的首一多项式系数

$$\sum_{i=0}^{n} d_i^*\cdot x^{n-i}=0, \qquad d_0^*=1$$

所以

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(d_j-d_0)/s_j, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

这里$d_l^*$的公式可直接由Vieta公式写出

$$d_l^*=(-1)^l\sum_{1<j_1<j_2<\cdots<j_m}^{n}\prod_{m=1}^{l}s_{j_m} \tag{9}$$

这种方法实质上属于解析方法，虽然复杂，但应用计算机来求解并不困难。

### 1.2 DFT算法

由于式(4)中$s_i(i=0,1,\cdots,n)$可以取任意数，如果适当选取$s_i$可使Vondermonde矩阵求逆更为方便。现取

$$s_k=\exp\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right)\cdot i, \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

这相当于在复平面的单位圆上均匀地取$n+1$个点。记$\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right)$，这里$i=\sqrt{-1}$，那么式(4)可表达为

$$\begin{pmatrix}\omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0\\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega^0 & \omega^k & \omega^{2k} & \cdots & \omega^{n\times k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega^0 & \omega^n & \omega^{2n} & \cdots & \omega^{n\times n}\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_k\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix} \tag{10}$$

其中$d_k(k=0,1,\cdots,n)$定义同前，记

$$W(\omega)=[\omega^{(i-1)\cdot(j-1)}]_{i,j} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n+1)$$

由DFT中的算法知

$$W^{-1}(\omega)=\frac{1}{n+1}[\omega^{-(i-1)(j-1)}]_{i,j} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n+1) \tag{11}$$

所以，由式(10)迅速可知

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{-k} & \omega^{-2k} & \cdots & \omega^{-nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{-n} & \omega^{-2n} & \cdots & \omega^{-nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_k \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

可见，这种方法更为简明实用，但它要求复矩阵的行列式。当使用计算机求解时，程序语言中若有复数数据类型，那么这种方法就显得更加实用有效。

### 1.3 推广的Faddeeva递推算法

仿照Faddeeva递推算法，可以得到式(3)中的$\alpha_k$和$P_k$。首先介绍一个引理

**引理 1**

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t)\cdots a_{1n}(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}(t)\cdots a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t)\cdots \frac{d}{dt}a_{1j}(t)\cdots a_{1n}(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}(t)\cdots \frac{d}{dt}a_{nj}(t)\cdots a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}[a_{ij}(t)]\cdot A_{ij}(t) \tag{13}$$

其中，$A_{ij}(t)$为$a_{ij}(t)$的代数余子式。

引理的证明是显然的。下面证明一个定理。

**定理 1** 设$E$，$A$为任意的$n\times n$常数矩阵，$s$为变量，则

$$\frac{d}{ds}[\det(Es-A)] = \mathrm{Tr}[E\cdot \mathrm{adj}(Es-A)] \tag{14}$$

证明，记$E=[e_{ij}]_{i,j}$，　$A=[a_{ij}]_{i,j}$ 并记$(Es-A)$中$e_{ij}s-a_{ij}$对应的代数余子式为$p_{ij}(s)$那么

$$\mathrm{adj}(Es-A)=[p_{ji}(s)]_{ij}$$

由引理1

$$\frac{d}{ds}[\det(Es-A)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{ds}\left((e_{ij}s-a_{ij})\right]_r\cdot p_{ij}(s)\right.$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\,p_{ij}(s)$$

而

$$\mathrm{Tr}[E\cdot \mathrm{adj}(Es-A)] = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(s) & \cdots & p_{n1}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n}(s) & \cdots & p_{nn}(s) \end{pmatrix}\right)$$

$$=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} e_{1j}\cdot p_{1j}(s) & \cdots & \sum_{j=1}^{n} e_{1j}\cdot p_{nj}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} e_{nj}\cdot p_{1j}(s) & \cdots & \sum_{j=1}^{n} e_{nj}\cdot p_{nj}(s) \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\cdot p_{ij}\cdot(s)$$

由式（14）及式（3）有

$$n\alpha_n s^{n-1}+(n-1)\alpha_{n-1}s^{n-2}+\cdots+\alpha_2 s+\alpha_1=\mathrm{Tr}\left[E\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}P_k s^k\right)\right]$$

显然有

$$\alpha_k=\frac{1}{k}\mathrm{Tr}(E\cdot P_{k-1}),\qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{15}$$

且 $\alpha_0=\det(-A)$

将式（3）写作

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k s^k I_n=(Es-A)\sum_{k=0}^{n-1}P_k s^k$$

知 $P_k(k=0,1,\cdots,n-1)$的递推公式为

$$\begin{cases} AP_k=EP_{k-1}-\alpha_k\cdot I_n, & (k=1,2,\cdots,n) \\ AP_0=-\alpha_0 I_n \end{cases} \tag{16}$$

综合上述，得到推广了的 Faddeeva 递推公式，这里设 $A$ 非奇异

$$\begin{cases} \alpha_k=\frac{1}{k}\mathrm{Tr}(EP_{k-1}) \\ P_k=A^{-1}(EP_{k-1}-\alpha_k I_n), \qquad k=1,2,\cdots,n \\ \alpha_0=\det(-A),\ P_0=\mathrm{adj}(-A)=-\alpha_0 A^{-1} \end{cases} \tag{17}$$

当 $A$ 奇异但 $E$ 非奇异时，作变换

$$s=z^{-1}$$

此时

$$(Es-A)^{-1}=(Ez^{-1}-A)^{-1}=z(-Az+E)^{-1}$$

利用 2.3 中推广的 Faddeeva 公式，式（17）变形为

$$\begin{cases} P_k=E^{-1}(\alpha_{k+1}I_n+AP_{k+1}) \\ \alpha_k=-\frac{1}{n-k}\mathrm{Tr}(AP_k) \\ \alpha_n=\det(E),\ P_n=O_n, \qquad (k=n-1,n-2,\cdots 2,1,0) \end{cases} \tag{18}$$

可见，只要 $E$，$A$ 不同时为奇异时，$\alpha_k$，$P_k$ 的求取是容易的。下面讨论 $E$，$A$ 皆为奇异的情形。

如果 $(Es-A)^{-1}$ 存在且 $E$，$A$ 皆奇异，对于实际系统，总存在一常数 $\lambda_0$ 使 $(\lambda_0 E+A)$ 非奇异。作变换 $V=s+\lambda_0$，则

$$(Es-A)^{-1}=[E_V-(A+\lambda_0 E)]^{-1}=\frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i V^i}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i V^i} \tag{19}$$

利用2.1，2.2，2.3中的方法以及式(18)可以得到 $\beta_k(k=0,1,\cdots,n)$ 以及 $Q_k(k=0,1,\cdots,n-1)$。由于

$$(Es-A)^{-1}=\frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i V^i}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i V^i}=\frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i (s+\lambda_0)^i}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i (s+\lambda_0)^i}=\frac{\sum_{i=0}^{n-1} P_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i}$$

将 $Q_i$，$\beta_i$ 转换为 $P_i$，$\alpha_i$ 可以由下面的公式完成

$$\alpha_k=\sum_{i=k}^{n} \beta_i \cdot \lambda_0^{i-k} \cdot \gamma_{i,k+1}=\beta_k+\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \lambda_0^{i-k} \gamma_{i,k+1} \quad (k=0,1,2,\cdots,n) \tag{20}$$

其中，$\gamma_{i,j}$ 的定义为

$$\begin{cases}\gamma_{i,j}=\gamma_{i-1,j}+\gamma_{i-1,j-1} \\ \gamma_{0,1}=1,\ \gamma_{i,1}=1,\ \gamma_{i,i+1}=1\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=2,3,\cdots,i) \tag{21}$$

同样

$$P_k=Q_k+\sum_{i=k+1}^{n-1} Q_i \lambda_0^{i-k} \gamma_{i,k+1} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{22}$$

## 2 算 例

**例1** 采用下例 $E$ 奇异，$A$ 非奇异

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**方法1** 利用式(17)

$$\alpha_0=\det(-A)=+1;\qquad P_0=-\alpha_0 A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{r}(E\cdot P_0)=0;\qquad P_1=A^{-1}(EP_0-\alpha_1 I_n)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(EP_1)=-1;\qquad P_2=A^{-1}(EP_1-\alpha_2 I_n)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_3=\frac{1}{3}\operatorname{Tr}(EP_2)=0$$

$$\therefore (E_s-A)^{-1}=\frac{1}{1-s_2}\begin{pmatrix}1-s & s-1 & 0\\ 1-s & s-s^2 & 0\\ 0 & 0 & 1+s\end{pmatrix}$$

**方法2**　利用DFT方法

$n=3$，则分别取$s_0=1$，$s_1=j$，$s_2=-1$，$s_3=-j$对应的行列式值为$d_0=0$，$d_1=2$，$d_2=0$，$d_3=2$

所以

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

则　$\det(Es-A)=1-s^2$

据式(17)得到

$$P_0=-A^{-1}\cdot\alpha_0=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P_1=A^{-1}(EP_0-\alpha_1 I_n)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P_2=A^{-1}(EP_1-\alpha_2 I_n)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得
$$(Es-A)^{-1}=\frac{1}{1-s^2}\begin{pmatrix}1-s & s-1 & 0\\ 1-s & s-s^2 & 0\\ 0 & 0 & 1+s\end{pmatrix}$$

**例 2**　$A$，$E$ 皆为奇异的情形

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix};\qquad E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

先令 $\lambda_0=1$，则 $\det(A+\lambda_0E)=-1$，即 $(A+E\cdot\lambda_0)$ 非奇异。令 $V=s+1$，由式(17)知

$$\beta_0=\det(-A-E)=1;\qquad Q_0=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\mathrm{Tr}(EQ_0)=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=0$$

$$Q_1=(A+E)^{-1}(EQ_0-\beta_1I_n)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(EQ_1)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-1$$

$$Q_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \beta_3=\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(EQ_2)=0$$

所以
$$(Es-A)^{-1}=[E_V-(A+E)]^{-1}$$
$$=\frac{1}{1-V^2}\begin{bmatrix}-1-V & 1+V & 0\\ -1-V & -2+V-V^2 & 0\\ 0 & 0 & -1+V\end{bmatrix}$$

应用式(20)～(22)，有

$$(Es-A)^{-1}=\frac{1}{-s^2-2s}\begin{pmatrix}-2-s & 2+s & 0\\ -2-s & -2-s-s^2 & 0\\ 0 & 0 & s\end{pmatrix}$$

## 3 结 论

本文提出了计算$(Es-A)$行列式多项式系数的三种有效的计算方法，并且介绍了$(Es-A)$伴随矩阵的矩阵多项式中矩阵系数的求法。文中介绍的算法可以考虑$E$，$A$分别奇异与同为奇异的情形。算例表明，本文提供的算法是有效的。在线性时不变奇异系统的研究中，本文提出的算法是有一定应用价值的。

### 参 考 文 献


1. 〔日〕须田信英等，自动控制中的矩阵理论.曹长修译，北京：科学出版社，1979.
2. Mertzois B G. On the sensitivity analysis of linear time-invariant singular systems. IEEE Trans. CAS—31, Nov, 1984.
3. 朱维彰，线性随机微分方程与其ARMA形式的采样模型. 控制理论与应用，1987，4（2）


（作者陈阳泉和孙明轩分别为原北京工业学院5系1984年和1985年毕业的硕士研究生）