第9卷 第3期　　西安工业学院学报　　Vol.9 No.3
1989年7月　JOURNAL OF XI'AN INSTITUTE OF TECHNOLOGY　Jul. 1989

坐标系转换矩阵与几何关系方程式的推导程序

陈阳泉
（工业自动化教研室）

摘　要

本文介绍了一个计算机程序，它用于推导坐标转换矩阵，或几何关系方程。文中阐述了程序的基本原理及编程要点，并给出了框图与应用实例。这种非数值计算程序设计思想及规则可用于其它类似场合，大大减轻人工推导的负担。该程序已在飞行器动力学、机器人动力学等方面取得了较好的应用。

关键词：非数值计算；自动公式生成；计算机程序设计。

引言

工程师们借助计算机进行数值计算可以解决大量问题，然而计算机用于非数值计算同样可以帮工程师的忙。较简单非数值计算实际上就是基于简单逻辑的一系列字符串操作。复杂的非数值计算，如对任一输入函数字符型表达式程序输出其指定阶导函数公式（字符串）以及程序输出该输入函数的泰勒级数展开公式等，都需要运用数据结构原理及编译原理等计算机专业知识。本文的坐标系转换矩阵与几何关系方程式推导程序是较简单的非数值运算。通常，坐标系之间转换矩阵的求解，尤其是几何关系方程的最简捷形式的推导，如果使用手工推导，常常要两个人反复验证后确认无误。当所涉及的转角个数较多时，这种手工推导就显得非常繁琐且易出错。使用计算机推导，可以给出转换矩阵的公式及所有可能的几何关系方程，可由用户决定选取一个最简捷形式的几何关系方程，大大方便推导工作并避免了出错[1]。

1988－11－01 收到

1 坐标系旋转与几何关系方程的基本原理[2]

这里考虑的坐标系为三维空间坐标。下面以导弹飞行力学中常用的坐标系及它们之间的关系为例。记

ECS：地面固连坐标系， $A-X_eY_eZ_e$

BCS：弹体固连坐标系， $O-X_bY_bZ_b$

WCS：空速坐标系， $O-X_wY_wZ_w$

TCS：弹道固连坐标系， $O-X_tY_tZ_t$

A 点为导弹发射点，AX_e 为发射方向在地面的投影方向，向前为正方向。AY_e 为垂直当地的地垂线，向上为正方向。AZ_e 由右手坐标定则确定。O 点为导弹质心。这样，一旦ECS明确定义了，其它坐标系则可由坐标系旋转关系图确定。见图1。其中 φ，ϑ，γ 为弹体相对于 ECS 的偏航、俯仰、滚转角位置，θ_w，φ_w 为弹相对于风的速度矢量 V 的倾角与偏角（相对于ECS），γ_c 为速度偏转角，α_w，β_w 为弹的攻角与侧滑角[1][2]。

坐标系之间的转换，例如由 ECS至BCS坐标系转换，实质上是由一系列的基本转换构成的。记仅绕X轴正转 α_x角的基本转换矩阵为$L_x(\alpha_x)$，逆时针方向为正方向。那么，由ECS 至 BCS 的坐标变换矩阵为 $L_x(\gamma)\cdot L_z(\vartheta)\cdot L_y(\varphi)$，即

$$[X_b,Y_b,Z_b]^T=L_x(\gamma)\cdot L_z(\vartheta)L_y(\varphi)\cdot[X_e,\ Y_e,\ Z_e]^T$$

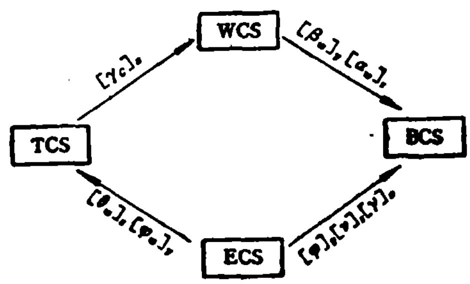

图 1 导弹飞行力学常用坐标系转角关系图

三个基本变换矩阵分别为

$$L_x(\alpha_x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha_x) & \sin(\alpha_x)\\ 0 & -\sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x)\end{pmatrix}$$

$$L_z(\alpha_y)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha_y) & 0 & -\sin(\alpha_y)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y)\end{pmatrix}$$

$$L_z(\alpha_z)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha_z) & \sin(\alpha_z) & 0\\ -\sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

令： $L(\gamma,\ \vartheta,\ \varphi)=L_x(\nu)\cdot L_z(\vartheta)\cdot L_y(\varphi)$，则有

$$L(\nu,\vartheta,\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta & -\sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta\cos\varphi\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma & \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\vartheta\sin\varphi\cos\gamma+\cos\varphi\sin\gamma \\ \sin\vartheta\cos\varphi\sin\gamma+\sin\varphi\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma & -\sin\vartheta\sin\varphi\sin\gamma+\cos\varphi\cos\gamma \end{pmatrix}$$

可见，当坐标系转换间所经旋转角度较多时，手工演推就十分繁琐且容易出差错。

坐标系之间的转换可归结为一系列的基本变换矩阵的乘积，有一定的规律性，很容易用计算机程序实现。只要知道了转换所经的转动角度及转动正反方向，计算机可以输出变换矩阵各元素的公式。顺便提及，由 *BCS* 至 *ECS* 的变换矩阵为 $L_y(-\varphi)\cdot L_z(-\vartheta)\cdot L_x(-\gamma)$

φ_w，θ_w 为空速 $\boldsymbol{v}=(v_x,\ v_y,\ v_z)^T$ 的方向角。

$\boldsymbol{u}=(u_x,\ u_y,\ u_z)^T$，为弹相对于地面的速度

$\boldsymbol{w}=(w_x,\ w_y,\ w_z)^T$，为风相对于地面的速度

则：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$ 即

$$(v_x,\ v_y,\ v_z)^T=(u_x-w_x,\ u_y-w_y,\ u_z-w_z)^T$$

那么有：

$$\varphi_w=-\mathrm{tg}^{-1}(v_z/v_x)$$

$$\theta_w=\mathrm{tg}^{-1}(v_y/(v_x^2+v_y^2)^{1/2})$$

图1中所涉及的角，只有五个角是独立的，其余的角皆可由这五个独立角导出。这就是几何关系方程。这五个角通常为弹体俯仰、偏航、滚转位置角 ϑ,φ，γ 以及空速方向角 φ_w，θ_w。当通过两个不同的路经转动后，取两个转动矩阵分量相等的部分可组成几何关系等式。

由 *BCS* 至 *WCS* 以及由 *BCS* 至 *ECS* 再至 *TCS* 的两个坐标转换矩阵的第一行对应相等（同为空速 $\boldsymbol{v}$ 的方向）。即由

$$L_y(-\beta_w)\cdot L_z(-\alpha_w) \text{ 与 } L_z(\theta_w)\cdot L_y(\varphi_w)\cdot L_y(-\varphi)\cdot L_z(-\vartheta)\cdot L_x(-\gamma)$$

第一行对应相等有几何关系方程

$$\beta_w=\sin^{-1}[\sin\gamma(\sin\vartheta\cdot\cos\theta_w\cdot\cos(\varphi-\varphi_w)-\cos\vartheta\sin\theta_w)$$
$$+\cos\gamma\sin(\varphi-\varphi_w)\cos\theta_w]$$

$$\alpha_w=\sin^{-1}[(\cos\gamma(\sin\vartheta\cos\theta_w\cdot\cos(\varphi-\varphi_w)-\cos\vartheta\sin\theta_w)$$
$$-\sin\gamma\sin(\varphi-\varphi_w)\cos\theta_w)/\cos\beta_w]$$

至于 γ_0 的求取，当 α_w，β_w 由上述二几何关系方程得到后，γ_0 的几何关系方程就可以有许多种形式。如前所述，γ_0 可由下面三个等式分别得到：

1° $L_x(\gamma_0)=L_y(-\beta_w)\cdot L_z(-\alpha_w)\cdot L_x(\gamma)\cdot L_z(\vartheta)\cdot L_y(\varphi)\cdot L_y(-\varphi_w)L_z(-\theta_w)\cdots(*)$

2° $L_z(\alpha_w)\cdot L_y(\beta_w)\cdot L_x(\gamma_0)=L_x(\gamma)L_z(\vartheta)\cdot L_y(\varphi)\cdot L_y(-\varphi_w)\cdot L_z(-\theta_w)\cdots(**)$

3° $L_y(-\varphi_w)\cdot L_z(-\theta_w)\cdot L_x(-\gamma_0)=L_y(-\varphi)\cdot L_z(-\vartheta)\cdot L_x(-\gamma)\cdot L_z(\alpha_w)\cdot L_y(\beta_w)\cdots(***)$

从这27个等式中选取一个简捷的等式是一件繁杂的事情。使用计算机可大大方便这种工作。

2 程序设计介绍

这里仅介绍本文程序中所使用的主要技巧。以 VAX．VMS FORTRAN 为例，假设语言中仅有从字符串取子字符串的功能。

2.1 初始化

初始化主要是生成三个基本转换矩阵。所有基本转换阵中只有四种量即 0，1，cos(·) sin(·)．根据转动角所绕的轴是x，y还是z来分别组成基本转换矩阵。平于转动正方向的处理主要表现在输入转角名前的负号的处理。见图 2 程序框图。

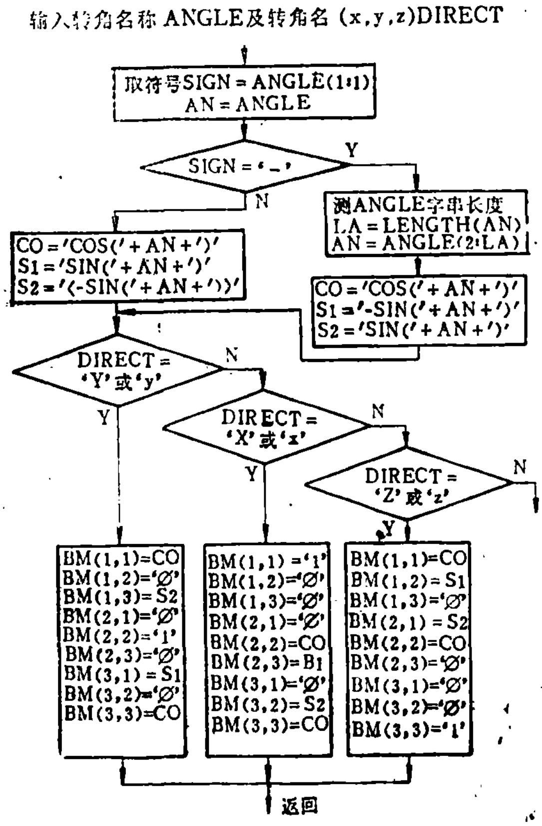

图 2 初始化程序框图

2.2 字串长度测取与字串相加子程序

1° 字串长度测取函数子程序

```
FUNCTION LENGTH (STRING)
CHARACTER STRING*(*)
LENGTH=LEN (STRING)
DO1  I=LENGTH,1, -1
IF (STRING(I:I).NE.'')GO TO 2
1. CONTINUE
2. LENGTH=I
RETURN
END
```

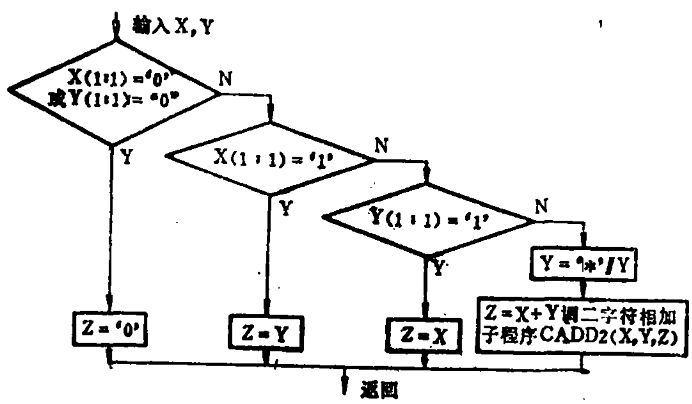

图 3 两字符变量相乘子程序框图

2°字串相加　CADD2(WORD1,WORD2,

WORD)

如果两个字串相加，应取其有效长度子字串合并，即应取

WORD = WORD 1(1 : LENGTH(WORD1))

// WORD2(1 : LENGTH (WORD2))

多个字串相加，应采用相同的办法。

2.3　两个字符变量相乘 MMULTϕ(x,y,z)

令 $z = x*y$，x,y,z 为字符型变量。两字符变量相乘是一个重要的基本子程序。程序框图见图 3。

2.4　两个字符变量矩阵相乘MMULTC (A, B, C)

C = A * B，其中 A，B，C 为 3×3 矩阵，矩阵中所有元素为字符变量。程序框图见图 4

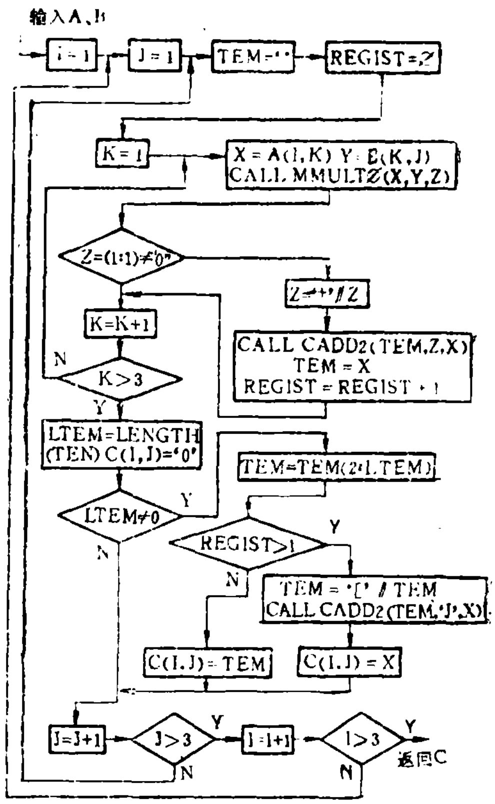

图 4　两个矩阵相乘子程序框图

3　程序运行实例

3.1　ECS 至 BCS 的变换矩阵L(γ,ϑ,φ)

```
COS(Theta)*COS(Psi)
****For Row 1 Column 1
SIN(Theta)
****For Row 1 Column 2
COS(Theta)*<-SIN(Psi)>
****For Row 1 Column 3
[COS(Gamma)*<-SIN(Theta)>*COS(Psi)+SIN(Gamma)*SIN(Psi)]
****For Row 2 Column 1
COS(Gamma)*COS(Theta)
****For Row 2 Column 2
[COS(Gamma)*<-SIN(Theta)>*<-SIN(Psi)>+SIN(Gamma)*COS(Psi)]
****For Row 2 Column 3
[<-SIN(Gamma)>*<-SIN(Theta)>*COS(Psi)+COS(Gamma)*SIN(Psi)]
****For Row 3 Column 1
<-SIN(Gamma)>*COS(Theta)
****For Row 3 Column 2
[<-SIN(Gamma)>*<-SIN(Theta)>*<-SIN(Psi)> +COS(Gamma)*COS(PSi)]
```

＊＊＊＊For Row 3 Column 3

3.2 α_w，β_w 的几何关系方程（取第一行对应相等）

[COS(Theta w)＊[COS(Psi w)＊COS(Psi)＊COS(Theta)＋〈－SIN(Psi w)〉＊〈－SIN(Psi)〉＊COS(Theta)]＋SIN(Theta w)＊SIN(Theta)]＝COS(Beta w)＊COS(AIfa w)

＃＃＃＃For Row 1 Column 1

[COS(Theta w)＊[COS(Psi w)＊[COS(Psi)＊〈－SIN(Theta)〉＊COS(Gama)＋SIN(Psi)＊SIN(Gama)]＋〈－SIN(Psi w)〉＊[〈－SIN(Psi)〉＊〈－SIN(Theta)〉＊COS(Gama)＋COS(Psi)＊SIN(Gama)]]＋SIN(Theta w)＊COS(Theta)＊COS(Gama)]＝COS(Beta w)＊〈－SIN(Alfaw)〉

＃＃＃＃For Row 1 Column 2

[COS(Theta w)＊[COS(Psi w)＊[COS(Psi)＊〈－SIN(Theta)〉＊〈－SIN(Gama)〉＋SIN(Psi)＊COS(Gama)]＋〈－SIN(Psi w)〉＊[〈－SIN(Psi)〉＊〈－SIN(Theta)〉＊〈－SIN(Gama)〉＋COS(Psi)＊COS(Gama)]]＋SIN(Thta w)＊COS(Theta)＊〈－SIN(Gama)〉]＝SIN(Beta w)

＃＃＃＃For Row 1 Column 3

上述两例的计算机输出结果与手工推导的公式是完全一致的。

3.3 γ_c 的几何关系方程

由式(＊)虽可迅速得到几何关系方程，但那显得十分复杂。今取其余二式并令有关相应行相等，有：

由式(＊＊)

$$\begin{cases} \sin\gamma_c = \dfrac{1}{\cos\beta_w}[\sin\gamma\cos\vartheta\cos\theta_w + \sin\gamma\sin\theta_w\sin\vartheta\cos(\varphi_w-\varphi) \\ \qquad\qquad - \cos\gamma\sin\theta_w\sin(\varphi_w-\varphi)] \\ \cos\gamma_c = \dfrac{1}{\cos\beta_w}[\sin\gamma\sin\vartheta\sin(\varphi_w-\varphi)+\cos\gamma\cos(\varphi_w-\varphi)] \end{cases}$$

由式（＊＊＊）

$$\begin{cases} \sin\gamma_c = \dfrac{1}{\cos\theta_w}[\sin\vartheta\cos\alpha_w\sin\beta_w - \cos\vartheta\cos\gamma\sin\alpha_w\sin\beta_w \\ \qquad\qquad + \cos\vartheta\sin\gamma\cos\beta_w] \\ \cos\gamma_c = \dfrac{1}{\cos\theta_w}[\sin\vartheta\sin\alpha_w + \cos\alpha_w\cos\gamma\cos\vartheta] \end{cases}$$

这两组几何关系方程都是可用的。后面的一组与文献[2]中介绍的是一致的。

[〈－SIN(Gama)〉＊[〈－SIN(Theta)〉＊[COS(Psi)＊COS(Psi w)＊COS(THeta w)＋〈－SIN(Psi)〉＊〈－SIN(Psi w)〉

```
     *COS(THeta w)]+COS(Theta)*SIN(THeta w)]+COS(Gama)*[SIN(Psi)
     *COS(Psi w)*COS(THeta w)+COS(Psi)*<-SIN(Psi w)>
     *COS(THeta w)]]=SIN(Beta w)
####For Row 3 Column 1

[<-SIN(Gama)>*[<-SIN(Theta)>*[COS(Psi)*COS(Psi w)
     *<-SIN(THeta w)>+<-SIN(Psi)>*<-SIN(Psi w)>
     *<-SIN(THeta w)>]+COS(Theta)*COS(THeta w)]+COS(Gama)
     *[SIN(Psi)*COS(Psi w)*<-SIN(THeta w)>+COS(Psi)
     *<-SIN(Psi w)>*<-SIN(THeta w)>]]=COS(Beta w)*<-SIN(GamaC)>
####For Row 3 Colomn 2

[<-SIN(Gama)>*<-SIN(Theta)>*[COS(Psi)*SIN(Psi w)+<-SIN(Psi)>
     *COS(Psi w)]+COS(Gama)*[SIN(Psi)*SIN(Psi w)+COS(Psi)
     *COS(Psi w)]]=COS(Beta w)*COS(GamaC)
####For Row 3 Column 3
```

式(**)运行结果

```
[SIN(Theta)*COS(Alfa w)*COS(Beta w)+COS(Theta)*[COS(Gama)
     *<-SIN(Alfa w)>*COS(Beta w)+<-SIN(Gama)>
     *SIN(Beta w)]]=SIN(Theta w)
####For Row 2 Column 1

[SIN(Theta)*SIN(Alfa w)+COS(Theta)*COS(Gama)
     *COS(Alfa w)]=COS(Theta w)*COS(CamaC)
####For Row 2 Column 2

[SIN(Theta)*COS(Alfa w)*<-SIN(Beta w)>+COS(Theta)*[COS(Gama)
     *<-SIN(Alfa w)>*<-SIN(Beta w)>+<-SIN(Gama)>
     *COS(Beta w)]]=COS(Theta w)*<-SIN(Gama C)>
####For Row 2 Column 3
```

式(***)运行结果

4 结论

本文的程序以FORTRAN 77写成，在VAX机上运行；以BASIC语言写成，在IBM-PC/XT机上运行。在实际使用中收到了很好的效果。它不仅可以减轻人工推导的负担，而且还可以成功地引入新的辅助坐标系及辅助角度[1],[3]以方便问题的解决。它所使用

的程序设计方法为类似问题的软件化提供了一个途径。文中的坐标转换也可方便地推广到任意维空间。

鸣谢：作者对北京理工大学祁载康副教授张鸿端副教授以及比利时 SRC 公司的支持表示感谢。

参 考 文 献

[1] 陈阳泉．飞行器仿真研究及靶道数据气动力系数辨识．北京理工大学硕士研究生论文，1987年4月

[2] 钱杏芳，张鸿端，林端雄编著．导弹飞行力学．北京：北京理工大学出版社，1987

[3] A Six Degree of Freedom Projectile Model and Program LOB6. SRC－TM－87677. Sept. 1987. Prof. Qi Zaikang (祁载康) andC hen, Yangquan(陈阳泉)

A COMPUTER PROGRAM FOR COORDINATE SYSTEM TRANSFORMATION MATRIX AND GEOMETRIC EQUATION GENERATION

Chen Yangquan

Abstract

In this paper, a computer program is introduced which can generate the coordinate system transformation matrix and geometric equation. The basic principles and the programming key points are introduced. A practical example is given, too. The design idea and regulations of the non-numerical program can be used in other similar cases. This program can greatly afford facilities for the formula derivation. The program in the paper has been in better application to flying vehicle dynamics and robot dynamics, etc..

Key words: non-numerical calculation; automatic formula generation; computer programming.