第9卷 第1期 西安工业学院学报 Vol.9 No.1
1989年2月 JOURNAL OF XIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY Feb. 1989

矩阵符号函数法求解ARE的N阶收敛迭代格式

陈阳泉
(工业自动化教研室)

摘 要

本文介绍了使用矩阵符号函数方法求解代数黎卡提方程(ARE)的原理及矩阵符号函数求取的各种加速方案。文中提出了一个基于N阶收敛的通用迭代格式来求取矩阵符号函数并给出证明。作者将ARE求解算法以FORTRAN及BASIC写成面向用户的调用程序模块,并对某二级倒立摆的最优反馈阵进行了计算,效果良好。

关键词: 代数黎卡提方程; 矩阵函数; 最优控制。

1 ARE求解概述

对于线性系统二次性能指标最优调节器问题(LQR),需要求解代数Riccati方程(ARE)以获得最优反馈阵。对于LQR问题:

$$\dot{X}=AX+Bu \tag{1.1}$$

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (X^TQX+u^TRu)\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

设$R=R^T>0$, $Q=Q^T=C^TC\geqslant 0$, (A, B)可稳定, (A, C)可检测, 则最优反馈阵为

$$u^*=-R^{-1}B^TP \tag{1.3}$$

其中, P为ARE (1.4) 的唯一非负定解。

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0 \tag{1.4}$$

对求解 (1.4) 式中矩阵P, 有线性矩阵方程组解法, Newton 迭代法, Hamilton 矩阵特征

1988—07—13收到

向量法等[1][2]。1971年，Robert[3]提出了利用符号函数法求解ARE的思想。后来，1976年，Denman-Beaverts[5]，1980年，Barrand[6]，Balzer[4]等人研究了矩阵符号函数的加速迭代方法。1986年，华中理工大学涂健、王永骥[7]又在Barrand的基础上，利用对初始迭代矩阵的预处理，提出了一个改进的迭代格式。北京大学叶庆凯、王肇明对当输入为单维时，提出了一种高精度的快速算法[8]。纵观现有的算法，以符号函数法最为有效，且精度高。当输入为单维时以文献[8]中的方法最经济。

2 使用矩阵符号函数法求解ARE的原理

2.1 符号函数

一个复数c的符号函数定义为：

$$\operatorname{sign}(c)=\begin{cases}+1, & \operatorname{Re}(c)>0\\ -1, & \operatorname{Re}(c)<0\end{cases} \tag{2.1}$$

一个矩阵$A_{n\times n}$的符号函数定义为

$$\operatorname{sign}(A)=T\cdot[\operatorname{sign}(\Lambda_A)]\cdot T^{-1} \tag{2.2}$$

其中，$\operatorname{sign}(\Lambda_A)=\operatorname{diag}[\operatorname{sigh}(\lambda_1),\cdots,\operatorname{sign}(\lambda_n)]$，$\lambda_i$为$A$阵的第$i$个特征值。$T$为$A$的对角化变换阵。矩阵符号函数的性质为

(1) $\operatorname{sign}(\alpha\cdot A)=\alpha\cdot\operatorname{sign}(A)$，$\alpha\in R$ (2.3)

(2) $\operatorname{sign}(A^{-1})=[\operatorname{sign}(A)]^{-1}$ (2.4)

(3) $\operatorname{sign}(A^T)=[\operatorname{sign}(A)]^T$ (2.5)

(4) $\operatorname{sign}(T\cdot A\cdot T^{-1})=T\cdot[\operatorname{sign}(A)]\cdot T^{-1}$，这里$T$可为任意非奇异阵 (2.6)

2.2 利用矩阵符号函数求解ARE

考虑LQR问题（1.1）、（1.2），构造Hamilton矩阵H：

$$H=\begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^T\\ -Q & -A^T\end{bmatrix}_{2n\times 2n} \tag{2.7}$$

在(A, B)可稳、(A, C)可测（$Q=C\cdot C^T$）条件下，一定存在一个非奇异变换阵Z，使得：

$$Z\cdot H\cdot Z^{-1}=\begin{bmatrix}-\Lambda & \\ & \Lambda\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

其中，$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\operatorname{Re}\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，记 $Z=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}$ 则

$$H=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\Lambda & \\ & \Lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}^{-1} \tag{2.9}$$

所以
$$\mathrm{sign}(H)=Z\cdot\begin{bmatrix}-I_n & \\ & I_n\end{bmatrix}\cdot Z^{-1} \tag{2.10}$$

记 $E=\begin{bmatrix}-I_n & \\ & I_n\end{bmatrix}$ 有

$$\mathrm{sign}(H)=Z\cdot E\cdot Z^{-1}$$

因：
$$\mathrm{sign}(H)+E=(Z\cdot E+E\cdot Z)\cdot Z^{-1}$$

$$=2\begin{bmatrix}-Z_{11} & \\ & Z_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}^{-1} \tag{2.11}$$

所以，

$$[\mathrm{sign}(H)+E]^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-Z_{11}^{-1} & \\ & Z_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-I_n & Z_{12}\cdot Z_{22}^{-1}\\ -Z_{21}Z_{11}^{-1} & I_n\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

易知 $Z_{21}Z_{11}^{-1}=P$ 为 ARE 的解[10-11]，故

$$[\mathrm{sign}(H)+E]^{-1}\cdot[\mathrm{sign}(H)+E]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}+I_n & Z_{12}\cdot Z_{22}^{-1}\\ -P & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_{11} & W_{12}\\ W_{21} & W_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}I_n & \\ & I_n\end{bmatrix}=I_{2n} \tag{2.13}$$

因此：
$$\frac{1}{2}(-PW_{11}+W_{21})=0 \tag{2.14}$$

ARE 的解为：
$$P=W_{21}\cdot W_{11}^{-1} \tag{2.15}$$

这里将
$$\mathrm{sign}\ (H)\ +E=\begin{bmatrix}W_{11} & W_{12}\\ W_{21} & W_{22}\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

可见，关键的问题在于求解 sign(H)。

3 矩阵 H 的符号函数 $\mathrm{sign}_i(H)$ 的计算方法

3.1 Denman 方法

Denman[6] 指出，求解矩阵符号函数的过程可化为 $H^2=I_{2n}$ 的求根过程来迭代求解，其迭代格式为：

$$\mathrm{sign}(H)=\lim_{k\to\infty}H_k \tag{3.1}$$

$$H_{k+1}=\frac{1}{2}(H_k+H_k^{-1}),\quad H_0=H \tag{3.2}$$

3.2 Barrand 方法

Barrand[6] 研究了加速求取矩阵符号函数的可能性，提出了以下的最优加速迭代格式：

$$H_{k+1}=\frac{1}{2}\cdot(\alpha_k\cdot H_k+\alpha_k^{-1}\cdot H_k^{-1}),\quad H_0=H \tag{3.3}$$

其中，
$$\alpha_k=1/[|\lambda_{max}(H_k)|\cdot|\lambda_{min}(H_k)|]^{\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

为避免求特征值，利用以下估计式：

$$|\lambda_{max}(H_k)|\leqslant\|H_k\|,\quad |\lambda_{min}(H_k)|\geqslant 1/\|H_k^{-1}\| \tag{3.5}$$

得到实用的迭代公式

$$H_{k+1}=\frac{1}{2}\left[(\|H_k^{-1}\|/\|H_k\|)^{\frac{1}{2}}\cdot H_k+(\|H_k\|/\|H_k^{-1}\|)^{\frac{1}{2}}\cdot H_k^{-1}\right] \tag{3.6}$$

$$H_0=H$$

迭代出口条件可取为

$$\varepsilon_{k+1}\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon_k,\quad \varepsilon_k\triangleq\max\{(\|H_{k+1}\|/\|H_k\|)-1,\ \|H_{k+1}-H_k\|/\|H_k\|\} \tag{3.7}$$

3.3 Balzer 方法

Balzer 方法[4] 是目前较为实用的加速方法之一。迭代格式为

$$H_{k+1}=\alpha_k\cdot H_k+\beta_k\cdot H_k^{-1},\quad H_0=H \tag{3.8}$$

其中，
$$\beta_k=1-\alpha_k,\quad \alpha_k=1/[|\det(H_k)|^{\frac{1}{2n}}+1] \tag{3.9}$$

出口条件为：
$$H_k\approx H_k^{-1}$$

3.4 涂健、王永骥方法[7]

文献[7]在Barrand 的基础上，利用最小范数矩阵的思想，更为精确地对 λ_{max} 及 λ_{min} 进行估计，因而可有利于快速收敛。此时若引入 H_k 的最小范数矩阵 H_{k0}，则

$$\begin{cases}|\lambda_{max}(H_k)|\leqslant\|H_{k0}\|\leqslant\|H_k\|\\ |\lambda_{min}(H_k)|\geqslant 1/\|H_{k0}\|\end{cases} \tag{3.10}$$

仍采用 (3.3)、(3.4) 及 (3.7) 式，收敛速度能显著加快。

4 基于N阶收敛的通用迭代格式

以上各种关于求解sign(H)的迭代格式都有一定的使用价值，这里提出一个N阶收敛的

通用迭代格式，它构造了一个关于$\boldsymbol{H}$的序列，使其收敛至$\boldsymbol{H}$的符号函数矩阵。

当N为奇数时，N阶收敛通用迭代格式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_{k+1}=\left[\sum\limits_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i}\boldsymbol{H}_k^{N-2i}\right]\cdot\left[\sum\limits_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\right]^{-1} \\ \boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{H} \end{cases} \tag{4.1}$$

N为偶数时，迭代格式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_{k+1}=\sum\limits_{i=0}^{N/2} C_N^{2i}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i}\Big]\cdot\left[\sum\limits_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\right]^{-1} \\ \boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{H} \end{cases} \tag{4.2}$$

C_i^j 为组合数

关于（4.1）、（4.2）式的证明：

只证明N为奇数的情况，余同理。首先构造一矩阵双线性变换$\boldsymbol{B}_{k+1}$：

$$\boldsymbol{B}_{k+1}=[\boldsymbol{H}_{k+1}-\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})]\cdot[\boldsymbol{H}_{k+1}+\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})]^{-1} \tag{4.3}$$

由附录知：$\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})$ 与 $\boldsymbol{H}_k$ 可交换。且

$$[\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})]^2=\boldsymbol{I}_{2n} \tag{4.4}$$

所以，变换$\boldsymbol{B}_{k+1}$中代入（4.1）式有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{k+1}=&\left[\left(\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\right)^{-1}-\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})\right]\cdot \\
&\left[\left(\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\right)^{-1}+\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})\right]^{-1} \\
=&\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i}-\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\cdot\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\right]^{-1}\cdot \\
&\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{(N-1)/2} C_N^{2i}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i}+\sum_{i=1}^{(N-1)/2} C_N^{2i+1}\cdot\boldsymbol{H}_k^{N-2i-1}\cdot\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})\right]^{-1} \\
=&[\boldsymbol{H}_k-\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})]^N\cdot[\boldsymbol{H}_k+\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})]^{-N}=\boldsymbol{B}_k^N
\end{aligned} \tag{4.5}$$

由于 $\boldsymbol{B}_k$ 的特征值 $\lambda_{B_k i}$ 也是 $\boldsymbol{H}_k$ 的特征值 $\lambda_{H_k i}$ 的双线性变换，即

$$\lambda_{B_k i}=\frac{\lambda_{H_k i}-\mathrm{sign}(\lambda_{H_k i})}{\lambda_{H_k i}+\mathrm{sign}(\lambda_{H_k i})}=\frac{|\lambda_{H_k i}|-1}{|\lambda_{H_k i}|+1} \tag{4.6}$$

所以，$|\lambda_{B_k i}|<1$. 由泛函分析理论知，（4.3）式为一压缩映射，所以 $\lambda_{B_\infty i}=0$，$\boldsymbol{B}_\infty=0$ 且（4.1）式的收敛为 N 阶的。由（4.6）式又知，$|\lambda_{B_k i}|<1$ 与 $|\lambda_{H_k i}|$ 的大小无关，可知迭代是大范围内收敛的。

由（4.3）式，

$$\boldsymbol{H}_{k+1}=(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{B}_{k+1})^{-1}\cdot(\boldsymbol{I}_{2n}+\boldsymbol{B}_{k+1})\cdot\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})$$

$$\therefore \qquad \lim_{k\to\infty} H_{k+1} = \mathrm{sign}(H) \qquad \text{证毕}$$

当$N=2$时，迭代公式为

$$H_{k+1} = \frac{1}{2}(H_k^2 + I_{2n})\cdot H_k^{-1} = \frac{1}{2}(H_k + H_k^{-1}) \tag{4.7}$$

这与 Denman 的公式是相同的。

当$N=3$ 时，

$$H_{k+1} = H_k\cdot(H_k^2 + 3\cdot I_{2n})\cdot(3H_k^2 + I_{2n})^{-1} \tag{4.8}$$

这与文献[7]中提出的是相符的。

当 $N=4$ 时，

$$H_{k+1} = \frac{1}{6}(H_k^4 + 10\cdot H_k^2 + I_{2n})\cdot(H_k^2 + I_{2n})^{-1}\cdot H_k^{-1} \tag{4.9}$$

需要指出的是，由于计算机字长有限，随着N的加大，需要更多的矩阵运算并由此带来误差积累。所以，选取合理的收敛阶次需要在上述因素之间作一折衷，尽管理论证明收敛阶N越大越好。

5 数值举例与结论

5.1 数值举例

下面为利用本文方法对某双级倒摆的最优反馈阵的计算输出。

这里采用 $N=3$ 时公式。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.0184 & 8.5834 & -11.637 & 0.01426 & -0.27368 \\ 0 & 26.461 & -13.922 & 26.034 & -0.27368 & 0.17079 \\ 0 & -30.17 & 58.039 & -29.682 & 0.59778 & -0.55685 \end{pmatrix}$$

$$B = [0,\ 0,\ 0,\ 6.881,\ -15.394,\ 17.551]^T$$

$$Q = \mathrm{diag}[1,\ 50,\ 250,\ 0,\ 0,\ 0]$$

$$R = 0.2$$

ARE 的解矩阵P为

$$P=\begin{pmatrix} 1.9872 & 6.8732 & 7.5010 & 1.6885 & 2.2579 & 1.3439 \\ 6.8734 & 75.883 & 95.542 & 11.405 & 23.749 & 16.761 \\ 7.5010 & 95.542 & 148.43 & 13.306 & 32.409 & 24.399 \\ 1.6885 & 11.405 & 13.306 & 2.5954 & 3.8485 & 2.3893 \\ 2.2579 & 23.749 & 32.408 & 3.8485 & 8.2788 & 5.933 \\ 1.3439 & 16.761 & 24.399 & 2.3894 & 5.9330 & 4.4372 \end{pmatrix}$$

最优反馈阵K为

$$K=[2.2358,\ 35.313,\ 104.45,\ 2.7516,\ 15.838,\ 14.929]$$

5.2 结 论

本文对 ARE 求解的有效方法——矩阵符号函数法作了系统介绍，并重点介绍了矩阵符号函数计算的各种加速迭代方案。最后提出了基于N阶收敛的迭代格式为验证，对比 ARE 其它解法的有效性提供了一条途径。

鸣谢：作者感谢朱维彰老师的指导。

参 考 文 献

[1] 叶庆凯，王肇明编著．优化与最优控制中的计算方法．北京：科学出版社，1986.

[2] 姜长生．控制系统中的矩阵方程的数值解．机载火控，1985（2）

[3] J. D. Roberts. CUED/B-Control/TR13. Engineering Department Cambridge University, 1971.

[4] L. A. Balzer. Accelerated Convergence of the Matrik Sign Function Method of Solving Lyapunov, Riccati & other Matrix Equations. Int. Jour. of Control, 1980.

[5] E. D. Denman, A. N. Beaverts. The Matrix Sign Function and Computation in Systems. Appl. Math. & Comp, 1976.

[6] A. Y. Barraud. An Accelerated Newton Procers to Solve Riccati Equation via Matrix Sign Function.Compnter Aided Design of Control Systems, Proc. IFAC Symp, 1980.

[7] 涂 健，王永骥．一种求解代数 Riccati 方程的新方法——矩阵符号函数法．华中工学院学报，1986

[8] 叶庆凯，王肇明．代数 Riccati 方程的一种快速解法 I：单输入情况．控制理论与应用，1981（3）

[9] J. D. Roberts 8 Linear Model Reduction & Solution of the Algebraic Riccati equation By Use of Sign Fnnction Int. Jonr.of Control, 1980.

[10] 涂健主编．控制系统的数字仿真与计算机辅助设计．武汉：华中工学院出版社，1985.

[11] 吴智铭编．控制系统计算机辅助设计．北京：电子工业出版社，1986年12月.

附录：

证明 H_k 与 sign(H)可交换，即

$$\mathrm{sign}(H)\cdot H_k=H_k\cdot\mathrm{sign}(H)$$

证明：在此同样只讨论N为奇数的情形，当N为偶数时同理。先证明一个引理。

引理 1 $$\mathrm{sign}(H)=[\mathrm{sign}(H)]^{-1}$$

令$H=T\cdot\Lambda_H\cdot T^{-1}$，$T$为使$H$对角化的非奇异变换阵。由(2.4)，(2.6)式及符号函数的定义，有

$$\begin{aligned}[\mathrm{sign}(H)]^{-1}&=\mathrm{sign}(H^{-1})\\&=\mathrm{sign}\{(T\cdot\Lambda_H\cdot T^{-1})^{-1}\}\\&=T\cdot\mathrm{sign}(\Lambda_H^{-1})\cdot T^{-1}\\&=T\cdot\mathrm{sign}(\Lambda_H)\cdot T^{-1}\\&=\mathrm{sign}(H)\end{aligned}$$ 引理证毕

使用数学归纳法，

当$K=1$时，$H_k=H$，显然满足

$$H\cdot\mathrm{sign}(H)=\mathrm{sign}(H)\cdot H,\ \text{且}\ \mathrm{sign}[H\cdot\mathrm{sign}(H)]=I_{2n}$$

设$K=m$时成立，即

$$H_m\cdot\mathrm{sign}(H)=\mathrm{sign}(H)\cdot H_m$$

当$K=m+1$ 时，由(4.1)式及引理1，有

$$\begin{aligned}H_{m+1}\cdot\mathrm{sign}(H)&=\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i}\cdot H_m^{N-2i}\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i+1}\cdot H_m^{N-2i-1}\right]^{-1}\cdot\mathrm{sign}(H)\\&=\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i}\cdot H_m^{N-2i}\right]\cdot\left[\mathrm{sign}^{-1}(H)\cdot\left(\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i+1}\cdot H_m^{N-2i-1}\right)\right]^{-1}\\&=\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i}\cdot H_m^{N-2i}\right]\cdot\left[\left(\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i+1}\cdot H_m^{N-2i-1}\right)\cdot\mathrm{sign}^{-1}(H)\right]^{-1}\\&=\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i}\cdot H_m^{N-2i}\right]\cdot\mathrm{sign}(H)\cdot\left[\sum_{i=0}^{(N-1)/2}C_N^{2i+1}\cdot H_m^{N-2i-1}\right]^{-1}\\&=\mathrm{sign}(H)\cdot H_{m+1}\end{aligned}$$

由上可知，无论K为何正整数，均有

$$H_k\cdot\mathrm{sign}(H)=\mathrm{sign}(H)\cdot H_k$$ 证毕

AN ORDER-N CONVERGENCE ITERATION ALGORITHM FOR SOLVING ALGEBRAIC RICCATI EQUATION (ARE)

Chen Yangquan

Abstract

In this paper, the algebraic Riccati equation (ARE) solving problem is discussed. The method of solving ARE by using matrix sign function is introduced with various speed-up schemes for determining the matrix sign function. The universal iterative scheme based on order N convergency is advanced with a strict proof. The algorithm is implemented as calling modules in FORTRAN & BASIC. In determining the optimal feedback matrix, calculations show the effectiveness of the algorithm.

Key words: Riccati equation; matrix sign funcfion; optimol control.