

# 航弹符合阻力系数曲线的最佳动态拟合研究

陈阳泉<sup>1</sup> 鲁德业<sup>2</sup> 秦英孝<sup>3</sup> 史永高<sup>4</sup>

## 摘 要

将电影经纬仪三坐标测量数据辨识航弹最佳符合阻力系数曲线描述为一个跟踪最优控制问题,给出了符合阻力系数曲线的参量化描述并将泛函极小问题转化为多变量参数极小问题,给出了具体算法及减少计算量的技术。讨论了弹道方程的初值修正问题。通过某航弹的多枚轰投测试数据处理结果及比较,验证了本文方法和相应软件的可应用性。

**关键词** 气动特性 辨识 最优控制 数据处理

**中图分类号** E923.4 TP274

## 1 问题的描述

为解决航弹投炸的准确度,对航弹的阻力系数曲线应该较准确地了解。但是,由于投弹时飞机与航弹之间的气流干扰规律难以得知,而由风洞试验或理论估算得到的自由流场下的航弹阻力系数曲线亦不能较好地直接使用;因此,由电影经纬仪测得的航弹空间三坐标数据直接辨识(提取)航弹的符合阻力系数曲线(Fitting drag coefficient curve)显然具有实际应用价值。这里的阻力系数曲线,既不能看作是零攻角阻力系数曲线,也不能看作是全阻力系数曲线,而是对应于所使用的弹道模型而言的符合阻力系数曲线。它包含了投弹时干扰流场及攻角运动对航弹的综合影响。以最优符合阻力系数曲线为基础,可望提高轰炸精度。

采用三自由度(3DOF)质点弹道方程。设在时刻  $t$  时航弹在地面坐标系(ECS)的位置坐标为  $[x, y, z]^t$ , 弹相对 ECS 的速度  $\dot{v}$  在 ECS 中为  $[u_x, u_y, u_z]^t$ , 则

$$\dot{u}_x = f_1(X, C_{df}(t)) = -\frac{\rho S}{2m} v(u_x - w_x) C_{df}(t)$$

$$\dot{u}_y = f_2(X, C_{df}(t)) = -\frac{\rho S}{2m} v u_y C_{df}(t) - g$$

1991-12-13 收稿

1, 4—西安工业学院; 2—中国人民解放军第三十二试验基地; 3—兰州空军。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_x &= f_3(X, C_{df}(t)) = -\frac{\rho S}{2m} v(u_x - w_x) C_{df}(t) \\ \dot{x} &= f_4(X, C_{df}(t)) = u_x \\ \dot{y} &= f_5(X, C_{df}(t)) = u_y \\ \dot{z} &= f_6(X, C_{df}(t)) = u_z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

记系统(弹道)方程(1)的状态为  $X^T = [u_x, u_y, u_z, x, y, z]$ 。

其中,  $g$  为重力加速度,  $m/s^2$ ;

$w_x, w_z$  为风速在 ECS 中的分量,  $m/s$ ;

$v$  为航弹相对风的速度,  $m/s$ 。

$$v = \sqrt{(u_x - w_x)^2 + u_y^2 + (u_z - w_z)^2} \quad (2)$$

$\rho$  为空气密度,  $kg/m^3$ ;

$S$  为航弹参考面积, 取  $S = \frac{\pi}{4} d^2$ 。  $d$  为弹径,  $m$ ;

$C_{df}(t)$  为符合阻力系数曲线。

由电影经纬仪测得的航弹坐标为  $x_m(t)$ ,  $y_m(t)$ ,  $z_m(t)$ 。取泛函指标为:

$$J[C_{df}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[C_{df}(t), X(t), t] dt \quad (3)$$

其中,  $L = (x(t) - x_m(t))^2 + (y(t) - y_m(t))^2 + (z(t) - z_m(t))^2$

显然  $L$  不显含  $C_{df}(t)$  及时间  $t$ 。

视  $C_{df}(t)$  为控制函数, 则由电影经纬仪三坐标测量数据辨识航弹符合阻力系数曲线  $C_{df}(t)$ , 就是由(1)式和(3)式构成的最优跟踪控制问题。设状态方程(1)的状态初值  $u_{x0}$ ,  $u_{y0}$ ,  $u_{z0}$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  已知,  $t_0$ ,  $t_f$  给定且终端自由。

## 2 符合阻力系数曲线的参量化描述

直接求解上述最优控制问题计算量很大, 它涉及到 Hilbert 空间中泛函  $J[C_{df}(t)]$  对  $C_{df}(t)$  的梯度, 且显然是一个奇异最优控制问题。这里, 将  $C_{df}(t)$  表示成分段三次多项式形式, 并要求各段之间光滑连接,  $C_{df}(t)$  能够具有足够的机动性。这样, 就将泛函极小问题转化成多变量参数极小问题, 并且有效地克服了直接求解奇异最优控制数值计算上的困难。

将  $C_{df}(t)$  ( $t \in [t_0, t_f]$ ) 分为  $n$  段, 有  $n+1$  个分段节点, 记作  $t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = t_f$ 。又设  $t_i$  结点处对应  $C_{df}(t)$  的函数值及导数值分别为  $f_i$ ,  $d_i$ , 考察  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  知, 由  $f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}$  可唯一决定一个三次多项式  $C_{df_i}(t)$ , 可以表示为:

$$\begin{aligned} C_{df_i}(t) &= [\gamma_1(\tau_i), \gamma_2(\tau_i), \gamma_3(\tau_i), \gamma_4(\tau_i)] [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^t \\ &= [a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}] [1, t, t^2, t^3]^t \end{aligned}$$

$$= [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}] [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3]^t \tag{4}$$

其中,  $\tau_i = (t - t_i)/h_i$ ,  $h_i = t_{i+1} - t_i$ . 显然,  $\tau_i \in [0, 1]$  容易得到

$$A_i [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T = [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^T \tag{5}$$

其中,

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_i^{-1} & 2h_i^{-1} & 3h_i^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ -3 & -2h_i & 3 & -h_i \\ 2 & h_i & -2 & h_i \end{pmatrix}$$

那么有

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(\tau_i) \\ \gamma_2(\tau_i) \\ \gamma_3(\tau_i) \\ \gamma_4(\tau_i) \end{pmatrix}^T = [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3] A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - 3\tau_i^2 + 2\tau_i \\ h_i(\tau_i - 2\tau_i^2 + \tau_i^3) \\ 3\tau_i^2 - 2\tau_i^3 \\ h_i(-\tau_i^2 + \tau_i^3) \end{pmatrix}^T \tag{6}$$

以及  $[\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T = A_2 [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \alpha_{4i}]^T \tag{7}$

其中,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \\ 0 & h_i & 2h_i t_i & 3h_i t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^2 & 3h_i^2 t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^3 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -h_i^{-1} t_i & h_i^{-2} t_i^2 & -h_i^{-3} t_i^3 \\ 0 & -h_i^{-1} & -2h_i^{-2} t_i & 3h_i^{-3} t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^{-2} & -3h_i^{-3} t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^{-3} \end{pmatrix}$$

显然,  $C_{ar}(t) \in C^1[t_0, t_f]$ . 由于分段数  $n$  和分段结点  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) 由用户决定,  $C_{ar}(t)$  的机动性能得到保证且为光滑的. 记

$$c_{2i-1} = f_i, \quad c_{2i} = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

$$C^T = [c_1, c_2, \dots, c_{2n+2}]$$

极小化  $J[C^T]$  的主要任务是求取  $\partial J / \partial c_i$  及  $\partial^2 J / \partial c_i \partial c_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 2n+2$ )

### 3 Hamilton 函数解法

对系统状态方程(1)及指标泛函(2), 引入 Hamilton 函数  $H(C_{ar}(t), X(t), t)$ , 简记为  $H$ , 则

$$H = L + \lambda^T f \tag{8}$$

其中,  $f^T = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]$ , 见(1)式;

$L$  见(2)式;

$\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6]$  为伴随向量.

由最优控制理论<sup>[1]</sup>知, 由于终端自由, 则

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\frac{\partial L}{\partial X} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial X} \quad (\lambda(t)|_{t=t_f} = 0) \quad (9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial C_{df}(t)} = \frac{\partial L}{\partial C_{df}(t)} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial C_{df}(t)} \quad (10)$$

现记  $\varphi_i = \frac{\partial J}{\partial c_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n+2$ ), 根据最大值原理

$$\frac{\partial H}{\partial C_{df}(t)} = 0 \quad (11)$$

由(10)式知, 
$$\frac{\partial L}{\partial C_{df}(t)} = \frac{-\partial(\lambda^T f)}{\partial C_{df}(t)} \quad (12)$$

亦即 
$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = \frac{-\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial C_{df}(t)} \quad (12')$$

所以, 
$$\begin{aligned} \varphi_i &= - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial C_{df}(t)} dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\rho S v}{2m} [\lambda_1(u_x - w_x) + \lambda_2 u_y + \lambda_3(u_x - w_x)] dt \end{aligned} \quad (13)$$

注意到

$$\frac{\partial v}{\partial c_j} = \frac{u_x - w_x}{v} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial c_j} + \frac{u_y}{v} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial c_j} + \frac{u_x - w_x}{v} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial c_j} \quad (14)$$

并忽略  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} &= \frac{\partial^2 J}{\partial c_i \partial c_j} = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\rho S}{2m} \cdot \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial c_j} \lambda_3 + v \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_j} \right) (u_x - w_x) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial c_j} \lambda_2 + v \frac{\partial \lambda_2}{\partial c_j} \right) u_y + \left( \frac{\partial v}{\partial c_j} \lambda_3 + v \frac{\partial \lambda_3}{\partial c_j} \right) (u_x - w_x) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \frac{\partial u_x}{\partial c_j} + \lambda_2 \frac{\partial u_y}{\partial c_j} + \lambda_3 \frac{\partial u_x}{\partial c_j} \right] dt \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n+2) \end{aligned} \quad (15)$$

由(1)式两边对  $c_j$  求偏导得 ( $j = 1, 2, \dots, 2n+2$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_x}{\partial c_j} \right) &= -\frac{\rho S}{2m} \left[ v C_{df}(t) \frac{\partial u_x}{\partial c_j} + (u_x - w_x) C_{df}(t) \frac{\partial v}{\partial c_j} + v(u_x - w_x) \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_j} \right] \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_y}{\partial c_j} \right) &= -\frac{\rho S}{2m} \left[ v C_{df}(t) \frac{\partial u_y}{\partial c_j} + u_y C_{df}(t) \frac{\partial v}{\partial c_j} + v u_y \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_j} \right] \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_z}{\partial c_j} \right) &= -\frac{\rho S}{2m} \left[ v C_{df}(t) \frac{\partial u_z}{\partial c_j} + (u_z - w_z) C_{df}(t) \frac{\partial v}{\partial c_j} + v(u_z - w_z) \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_j} \right] \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial c_j} \right) &= \frac{\partial u_x}{\partial c_j}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial c_j} \right) = \frac{\partial u_y}{\partial c_j}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial c_j} \right) = \frac{\partial u_z}{\partial c_j} \end{aligned} \right\} (16)$$

微分方程组(16)的初值为0.

类似地,由(9)式两边对 $c_j$ 求偏导,可以得到 $\frac{\partial \lambda}{\partial c_j}$ 的微分方程组, $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial c_j}\right)_{t=t_j} = 0$ ,  
( $j = 1, 2, \dots, 2n+2$ ).

需要注意 $\frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i}$ 是一个类似门型的函数,由(4)式及(6)式知, $\frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i}$ 只是在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上不恒为零.这里, $k = \left[ \frac{i+1}{2} \right]$ .[\*]表示取整操作,且

$$\frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} = \begin{cases} 0, & t \notin [t_k, t_{k+1}] \\ \gamma_1(t_k), & t \in [t_k, t_{k+1}], \text{ 且 } i \text{ 为奇数} \\ \gamma_2(t_k), & t \in [t_k, t_{k+1}], \text{ 且 } i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (17)$$

至此,可应用Newton-Raphson迭代,即

$$C^{(k+1)} = C^{(k)} + \Delta C^{(k)} \quad (18)$$

$$A^{(k)} \cdot \Delta C^{(k)} = B^{(k)} \quad (19)$$

其中, $k$ 为迭代次数, $\Delta C^{(k)}$ 为第 $k$ 次迭代的优化参数的增量,矩阵 $A^{(k)}$ , $B^{(k)}$ 的元 $a_{ij}$ 和 $b_i$ 分别为:

$$a_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}; \quad b_i = -\varphi_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n+2) \quad (20)$$

算法步骤归结为:

①由 $C^{(k)}$ 表示的 $C_{df}(t)$ 及 $X_0$ , $\left. \frac{\partial X(t)}{\partial c_j} \right|_{t=t_0} = 0$ 从 $t_0$ 至 $t_f$ 共同正向积分(1)和(16)式得到 $X(t)$ 及 $\frac{\partial X}{\partial c_j}$ .

②由 $X(t)$ , $\frac{\partial X}{\partial c_j}$ 和 $\lambda(t)|_{t=t_f} = 0$ , $\left. \frac{\partial \lambda(t)}{\partial c_j} \right|_{t=t_f} = 0$ ,从 $t_f$ 至 $t_0$ 共同反向积分由(9)式得到的 $\frac{\partial \lambda}{\partial c_j}$ 的微分方程组,得到 $\lambda(t)$ 和 $\frac{\partial \lambda(t)}{\partial c_j}$ .

③由(13)和(15)式计算 $\varphi_i$ 及 $\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}$ ,形成矩阵 $A^{(k)}$ , $B^{(k)}$ .

④解线性方程组(19)得到 $\Delta C^{(k)}$ ,由(18)式计算得到 $C^{(k+1)}$ ,转向①,由此形成迭代.

正、反向积分时均需注意, 设  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , 则  $-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial X(t)}{\partial c_j} \right) = 0$  ( $j = 2k + 3, 2k + 4, \dots, 2n + 2$ ), 以及  $-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \lambda(t)}{\partial c_i} \right) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, 2k + 2$ ). 这由  $C_{dr}(t)$  的参量化描述方式是不难理解的.

该算法收敛速度快, 但需要一个较好的初值  $C^{(0)}$ , 一般可先使用直接数值微分方法从 (1) 式直接得到  $\overline{C}_{dr}(t)$ . 由于要对测量数据进行二阶微分, 引入的数值误差是很大的. 使用适当的数据拟合及微商技术, 是不难得到  $\overline{C}_{dr}(t)$  的序列的. 可以使用文献 [2] 中的方法及软件, 对得到的  $\overline{C}_{dr}(t)$  序列进行带约束的分段多项式拟合. 由 (4)~(7) 式进行系数转换得到一个较好的  $C^{(0)}$ , 进一步应用本文方法寻优, 从而得到对应于弹道方程 (1) 及泛函指标 (3) 的最佳符合阻力系数曲线  $C_{dr}(t)$ . 它实质上只是最优控制解函数空间中的一个次最优解.

正、反向积分各需积分  $12n + 18$  个微分方程. 当  $n$  较大时, 计算量是很大的. 为避免反向积分, 由 (2) 式两边直接对  $c_i$  求偏导

$$\varphi_i = \frac{\partial J}{\partial c_i} = 2 \int_{t_0}^{t_f} \left[ (x - x_m) \frac{\partial x}{\partial c_i} + (y - y_m) \frac{\partial y}{\partial c_i} + (z - z_m) \frac{\partial z}{\partial c_i} \right] dt \quad (21)$$

$$\text{再取} \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} = 2 \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial x}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial c_i} + \frac{\partial y}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial y}{\partial c_i} + \frac{\partial z}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial z}{\partial c_i} \right) dt \quad (22)$$

以 (21) 和 (22) 式分别代替 (13) 和 (15) 式就构成了文献 [3] 中使用的微分校正法. 这里, 忽略了  $(x - x_m) \frac{\partial^2 x}{\partial c_i \partial c_j}$ ,  $(y - y_m) \frac{\partial^2 y}{\partial c_i \partial c_j}$  和  $(z - z_m) \frac{\partial^2 z}{\partial c_i \partial c_j}$  二阶偏导项. 当  $C^{(0)}$  较好且迭代收敛时, 被忽略的二阶偏导项的影响会越来越小. 但这种做法的迭代次数要略多于前述严格的 Newton-Raphson 迭代方法, 而且对  $C^{(0)}$  的要求更为严格. 由于这种方法不需要反向积分, 少解了  $12n + 18$  个微分方程, 计算量下降了一半. 对于本文能够得到的较好的初值  $C^{(0)}$  的情况, 这种计算量少一半的方法是可行的和实用的.

#### 4 初始状态的参量修正

上述算法都要求已知弹道方程 (1) 的初始状态  $X_0^T = [u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}, x_0, y_0, z_0]$ . 由于  $X_0$  的精度会直接影响最优解的精度, 将  $X_0$  亦作为寻优参量是合理的. 这不仅扩张了寻优的参数空间, 而且肯定使指标  $J$  的值更小<sup>[4]</sup>.  $X_0$  的初值可以由测量值及其微商提供.

类似 (16) 式, 我们可得到关于  $X_0^T$  的 36 个微分方程组. 需要注意的是, 初值除

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} \Big|_{t=t_0} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0} \Big|_{t=t_0} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{t=t_0} = 1 \\ \frac{\partial u_x}{\partial u_{x0}} \Big|_{t=t_0} = 1, \quad \frac{\partial u_y}{\partial u_{y0}} \Big|_{t=t_0} = 1, \quad \text{及} \quad \frac{\partial u_z}{\partial u_{z0}} \Big|_{t=t_0} = 1 \end{aligned}$$

以外, 其余偏导微分方程的初值均为零, 并且忽略  $\partial C_{dr}(t) / \partial X_0$ .

### 5 实际轰投数据处理结果及分析

在处理实际轰投数据之前，使用仿真数据验证了软件的正确性。仿真数据的产生，使用了文献[5]中的软件，并加入了与电影经纬仪测量相当的测量误差。具体图、表、数据应属软件文档内容，这里不再列出。

这里使用某航弹三个航路轰投电影经纬仪实测弹道数据，其标准化计算结果见表1。其中，弹道系数  $c$  是在实际条件下符合射程的符合系数。其公式为：

$$c = \frac{i \cdot d^2}{m} \times 10^3, \quad i = \frac{c_x}{c_{x0}}$$

式中， $i$  为弹形系数； $c_x$  为弹自身阻力系数； $c_{x0}$  为标准弹阻力系数。

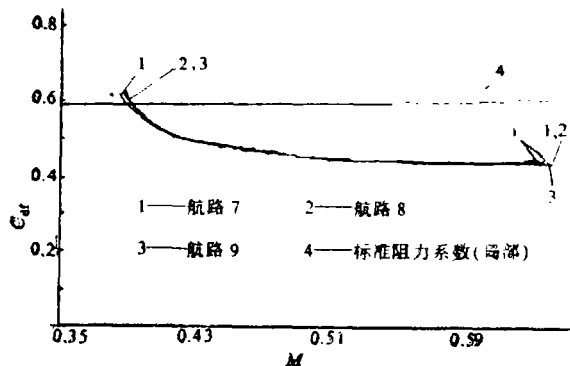
表1 三次投弹电影经纬仪实测弹道数据标准化计算结果

| 航路 | 投弹初值            |                   |                       | 标准弹道            |               |                   | 弹重 $m$<br>(kg) | 弹径 $d$<br>(m) | 弹道特征量           |                       |
|----|-----------------|-------------------|-----------------------|-----------------|---------------|-------------------|----------------|---------------|-----------------|-----------------------|
|    | 高度 $H_0$<br>(m) | 速度 $v_0$<br>(m/s) | 仰角 $\lambda_0$<br>(°) | 射程 $X_T$<br>(m) | 落时 $t$<br>(s) | 落速 $v_T$<br>(m/s) |                |               | 弹道系数<br>( $c$ ) | 弹形系数<br>( $i_{cp1}$ ) |
| 7  | 4101            | 127               | 0.15                  | 3321            | 32.08         | 216               | 52.5           | 0.205         | 0.60553         | 0.757                 |
| 8  | 4103            | 129               | 0.11                  | 3315            | 32.12         | 215               | 52.5           | 0.205         | 0.61213         | 0.765                 |
| 9  | 4106            | 125               | ~0.04                 | 3323            | 32.07         | 216               | 52.5           | 0.205         | 0.60274         | 0.753                 |

使用本文的方法进行处理，得到三条  $C_{ax}(M)$  曲线(见附图)，曲线1，2，3分别表示由航路7，8，9三次投弹电影经纬仪实测弹道数据使用本文方法处理结果，曲线4是该种航弹的标准弹阻力系数  $c_{x0}$  (局部)。根据附图的数据，得到各枚弹的弹形系数曲线  $i(M)$ ，

$$i(M) = C_{ax}(M) / c_{x0}(M)$$

再对  $i(M)$  求平均值，得到本文的平均弹形系数  $i_{cp2}$ ，与表1中的  $i_{cp1}$  具有可比较性，见表2。



附图 同种航弹三次不同轰投条件下辨识的最佳  $C_{ax}(M)$  曲线及  $c_{x0}(M)$  曲线对比

表 2 平均弹形系数的比较

| 航 路 | $i_{cp1}$ | $i_{cp2}$ | $i$ 误差<br>( $i_{cp1} - i_{cp2}$ )/ $i_{cp1}$ | 射程误差<br>$\Delta A/A$ |
|-----|-----------|-----------|--|----------------------|
| 7   | 0.757     | 0.792     | -4.616%                                      | -0.692%              |
| 8   | 0.765     | 0.793     | -3.639%                                      | -0.546%              |
| 9   | 0.753     | 0.792     | -5.167%                                      | -0.775%              |
| 平 均 | 0.758     | 0.792     | -4.474%                                      | -0.671%              |

从表 2 及附图我们可以肯定, 本文辨识得到的  $C_{df}(M)$  曲线是正确的。曲线的形状也是符合理论猜想的。由于该批数据中, Mach 数最大为 0.65, 当  $M < 0.65$ , 理论上应为一平直线。但由于航弹初投下时, 飞机周围对航弹而言的干扰流场的影响以及初始扰动的影响, 航弹的  $C_{df}(M)$  初始段具有衰减率略有区别的近似指数衰减规律的曲线形状, 和平滑过渡到正常的自由流场中的阻力系数曲线。

## 6 进一步的工作

以本文的工作为基础, 可以希望, 以最佳辨识出的  $C_{df}(M)$  取代单个弹道系数  $c$ , 能够提高轰炸表的精度, 从而提高轰炸准确度。

$C_{df}(M)$  初始段综合包含了干扰流场与初始扰动的攻角运动的耦合影响, 在解耦的前提下, 可以定量地研究干扰流场的影响或者干扰流场向自由流场的等效规律。

## 参 考 文 献

- [1] 吴受章编著. 应用最优控制. 西安: 西安交通大学出版社, 1986.
- [2] 陈阳泉, 窦惠芳. 带约束多段多项式拟合算法及软件. 气动实验与测量控制, 1991(3)
- [3] Chapman G T. Kirk D B. A method for extracting aerodynamic coefficients from free flight data. AIAA, 1970, 18(4)
- [4] 陈阳泉. 非线性靶板数据处理. 系统工程与电子技术, 1991(3)
- [5] 陈阳泉. 旋转稳定弹道道计算模型与软件研究(I), (II), (III). 兵工学报 (弹箭分册), 1990(3); 1990(4); 1991(1)



# RESEARCHES ON AEROBOMB'S FITTING DRAG COEFFICIENT CURVE BY OPTIMAL DYNAMIC FITTING METHOD

*Chen Yangquan    Lu Deye    Qing Yingxiao    Shi Yonggao*

## Abstract

In this paper, extracting aerobomb's optimal fitting drag coefficient curve from 3-dimensional theolodite film data is regarded as an optimal tracking control problem. A parameterization description of the fitting drag coefficient curve is given. The functional minimization problem converts into multivariable minimization problem. Detailed algorithm and the technique for computation reduction are also given. Initial state corrections of trajectory equations are discussed. The data reduction results and their comparisons from some aerobomb's bombing testing information indicate that the optimal dynamic fitting method and the relevant software are applicable.

**Key words** aerodynamic characteristics    identification    optimal control  
data processing

**作者简介:** 陈阳泉. 男, 26岁, 电子工程系讲师。1985年毕业于北京钢铁学院(现北京科技大学)自动化系。1987年于北京工业学院(现北京理工大学)自动控制系研究生毕业, 获工学硕士学位。1987年7月至10月, 去比利时布鲁塞尔“空间研究公司”(SRC)科研合作访问。主要从事控制理论及应用, 现代外弹道理论与应用及工程实用方法与商品化软件开发。目前研究方向是飞行器特性曲线辨识, 实用迭代学习控制方法与弹道外推方案研究以及仿真与静动态优化一体化问题等。

**通讯地址:** 710032 西安市金花北路七号  
西安工业学院电子工程系