

一种最优控制问题的 直接参数化描述解法

西安工业学院 陈阳泉
西安重型机器厂 王高亮

摘要 本文采用亏数为2的分段三次样条函数描述最优控制函数,使塔式起重机定位这个奇异最优控制问题转化为多变量参数极小问题。文中讨论了控制约束的加入,使用了直接搜索算法。给出了使用共轭梯度直接最优控制解法与本文方法的结果比较,表明本文方法是解决该类问题的一种直观有效的途径。本文叙述的方法容易被面向实际的工程应用人员所接受。

主题词 最佳控制, 参数最优化, 样条函数, 计算方法。

Direct Parametric Description Method for Solution of an Optimal Control Problem

Chen Yangquan

Xi'an Institute of Technology

Wang Gaoliang

Xi'an Heavy Machinery Factory

Abstract: In this paper, by applying piecewise cubic splines of deficient number 2 to describe the control function, the singular optimal control problem of tower crane positioning is converted to multivariable parametric minimization problem. Control constraints are discussed and the direct search algorithm is employed. Compared with direct conjugate gradient optimal control solution method, the method of this paper is a direct and effective way to solve the problem. The method and software suggested in this paper are easily accepted by practice-oriented engineers.

Keywords: Optimal positioning, Parametric optimization, Sub-optimal method.

收稿日期: 1991年11月11日

一、问题的模型

某码头塔式起重机模型的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = h(X, u, t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -[981x_3 - 37x_4 \\ + h(X, u, t)] / (70 - \frac{50}{2.7}t) \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} h(X, u, t) = & \{636u - 68.6 - 11x_2 \\ & - 0.12(-0.073 + x_3) \cdot [(70 \\ & - \frac{50}{2.7}t)x_4^2 - 981]\} \cdot [1 - 0.12 \\ & \cdot (-0.073 + x_3) \cdot x_3] \\ & \cdot X^T = [x_1, x_2, x_3, x_4] \end{aligned}$$

显然, (1) 式为一个时变非线性系统。要求决定最优控制函数 $u(t)$ 使 $t_0 = 0$ 秒时的状态 $X(t_0) = [0, 0, 0, 0]^T$ 转移到 t_f

$= 2.7$ 秒时的状态 $X(t_f) = [100, 25, 0, 0]^T$ 。并要求精度对 x_1 、 x_2 而言为 0.1, 对 x_3 、 x_4 而言为 0.001, 所以相应指标泛函取为

$$\begin{aligned} J[u] = & [x_1(t_f) - 100]^2 \\ & + [x_2(t_f) - 25]^2 + 10000[x_3^2(t_f) \\ & + x_4^2(t_f)] \end{aligned} \quad (2)$$

显然由(1)、(2)式构成的最优定位控制问题是一个奇异最优控制问题。对状态变量无约束, 但对于控制函数 u 有约束

$$|u| < 1 \quad (3)$$

二、直接参数化描述解法与软件

采用文献[1]中建议的 ϵ -算法可以解决上述奇异最优控制问题。本文采用一种面向工程师的简单方法。将控制函数 u 以某种确定函数结构的参量化描述, 泛函极小问题转化为多变量参数寻优问题。方法的原理见图 1。

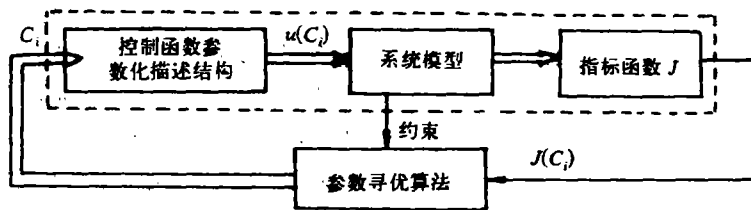


图1 直接参数化描述解法原理

本文采用亏数为 2 的分段三次样条函数结构来描述控制函数 $u(t)$ 。对区间 $[t_0, t_f]$ 作分划 Δ

$$\Delta: t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = t_f$$

m 为分段段数。选取 $2m + 2$ 个参数 C_i ($i = 1, 2, \dots, 2m + 2$)

$$C_{2i-1} = f_i,$$

$$C_{2i} = d_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, m + 1) \quad (4)$$

其中 f_i 、 d_i 分别表示分段节点 t_i 处对应 $u(t)$ 的函数值和一阶导数值。显然 $u(t) \in C^1[t_0, t_f]$ 。考察 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 知

由 $f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}$ 唯一决定一个三次 Hermite 型多项式, 记作 $u_i(t)$, 可表示为

$$\begin{aligned} u_i(t) &= [\gamma_1(\tau_i), \gamma_2(\tau_i), \gamma_3(\tau_i), \\ &\quad \cdot \gamma_4(\tau_i)] [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^T \\ &= [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \alpha_{4i}] [1, t, t^2, t^3]^T \\ &= [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}] [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3]^T \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\tau_i = (t - t_i) / h_i$, $h_i = t_{i+1} - t_i$, 显然 $\tau_i \in [0, 1]$ 容易得到

$$\begin{aligned} A_1 [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T \\ = [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^T \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_i^{-1} & 2h_i^{-1} & 3h_i^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ -3 & -2h_i & 3 & -h_i \\ 2 & h_i & 2 & h_i \end{bmatrix}$$

那么,

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(\tau_i) \\ \gamma_2(\tau_i) \\ \gamma_3(\tau_i) \\ \gamma_4(\tau_i) \end{bmatrix} = [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3]$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 3\tau_i^2 + 2\tau_i^3 \\ h_i(\tau_i - 2\tau_i^2 + \tau_i^3) \\ 3\tau_i^2 - 2\tau_i^3 \\ h_i(-\tau_i^2 + \tau_i^3) \end{bmatrix} \quad (7)$$

以及

$$\begin{aligned} &[\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T \\ &= A_2 [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \alpha_{4i}]^T \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \\ 0 & h_i & 2h_i t_i & 3h_i t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^2 & 3h_i^2 t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^3 \end{bmatrix}$$

A_2^{-1}

$$= \begin{bmatrix} 1 & -h_i^{-1} t_i & h_i^{-2} t_i^2 & -h_i^{-3} t_i^3 \\ 0 & h_i^{-1} & -2h_i^{-2} t_i & 3h_i^{-3} t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^{-2} & -3h_i^{-3} t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^{-3} \end{bmatrix}$$

采用这种低度光滑的分段三次样条函数描述, 其分段数 m 和分段节点 $t_i (i=1, 2, \dots, m+1)$ 由用户决定, $u(t)$ 的描述机动性得到保证. 参见 (4) 式, 记

$$C^T = [C_1, C_2, \dots, C_{2m+2}]$$

则由 (1)~(3) 式构成的最优控制问题转化为多变量函数 $J[C^T]$ 的极小化问题. 这可由现有成熟的各种寻优算法求解.

基于上述思想 (参见图 1), 作者在 ZFX^[2] 的基础上二次开发构成了直接参数化描述方法求解最优控制问题的中型软件 PSOSP 其最大特点是解决最优控制问题不需要使用者编写用户子程序与应用软件主程序相连接再运行. 这借助了 ZFX 中的基于模型库的系统构造方法及自动排序方法, 使得图 1 中的系统模型与指标函数两框完全可以由模型库中的有关模型子块组合连接来完成. 用户的任务只需按规定编写输入数据文件即可.

参数寻优算法框 (见图 1) 采用了三大类共 13 种多变量无约束寻优方法. 即直接搜索类 5 种: Hooke-Jeeves 法,

Rosenbrock 法, Davies-Swan-Campey 法, Powell 法和单纯形法; 共轭梯度类 5 种: Fletcher-Reeves 法, Polak-Ribiere 法, Beale-Powell 法, Scaled-FR 法和 Partan 法; 变尺度类 3 种: Davidon-Fletcher-Powell 法, Broyden-Fletcher 法和混合法。统一构造了优化方法库与仿真的接口, 取消了 ZFX 对优化的种种限制。可以指定任一模块中的某些参数或初值作为优化参量, 并使优化参量的个数达到 50。增加优化参量个数仅仅需要对一些数组进行扩维即可。

尽管可以由模型库中的模块组合来建立图 1 中的控制函数参数化描述结构一框, 仍然设置了一些常用的参数化描述结构如切比雪夫多项式、直线插值以及本文所使用的亏数为 2 的分段三次样条函数等以方便用户。本文使用的描述结构, 参数个数少且描述性强, 可以适合多数的应用场合。而且由于可直接给出分段多项式各系数, 使得 $u(t)$ 的控制实施更方便和实用。

由于实际控制量常常是受约束的, 考虑软件的通用性和成熟性, 本文没有在参数寻优算法中考虑约束。本文采用两种途径来考虑约束, 一是对 $u(t)$ 的直接约束, 另一种方法是采用惩罚函数的形式。对 $u(t)$ 直接约束可以在图 1 中的系统模型框前面直接加入模型库中的某些非线性环节来实现。例如, 对于约束

$$a < u(t) < b$$

可加入不对称饱和特性模型来实现, 即

$$u(t) = \begin{cases} a, & u(t) < a \\ u(t), & u(t) \in [a, b] \\ b, & u(t) > b \end{cases} \quad (9)$$

采用惩罚函数的方法可以考虑更广泛的一类约束, 设为

$$g(t, u(t), X(t)) \leq 0, \quad g \in R^r \quad (10)$$

可令

$$\check{J}(u) = J(u) + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^r N(g_j) g_j^2(t, u(t), X(t)) dt \quad (11)$$

其中

$$N(g_j) = \begin{cases} 0, & g_j(t, u(t), X(t)) \leq 0 \\ K_j, & g_j(t, u(t), X(t)) > 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$K_j > 0, j = 1, 2, \dots, r$$

K_j 为惩罚强度系数。

(11)、(12) 式也可以由模型库中的某些模块组合方便地构造。实践表明, 这两种约束的加入方法都是可行的, 但使用惩罚函数方法的效率更高些。

需要指出的是, 由于强调了模型库中各模块的复用度的概念, 本文的方法及软件可以解决控制为向量的问题。

三、计算结果及讨论

对系统(图 1)从 t_0 至 t_f 的积分步长取为 0.027 秒。 $u(t)$ 的参量化描述分段数为 $m=3$, 分段节点为 0.0—0.9—1.8—2.7。初始控制 $u^{(0)}(t) = 0.6$ 直线, 即参数初值 $C_{2i}^{(0)} = 0.6 (i = 1, 2, 3, 4)$, $C_{2i}^{(0)} = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 共有 8 个寻优参数, 参数寻优算法采用单纯形直接搜索方法。

图 2 是最优控制曲线 $u(t)$ 。其中, 曲线 1 是控制 $u(t)$ 的约束上界; 曲线 2 是基于最优控制问题的共轭梯度直接数值解法的 ϵ -算法的结果^[1]; 曲线 3~5 是使用本文方法及软件的结果。曲线 3 未考虑约束; 曲线 4 采用了 (9) 式的约束, 即 $u(t)$ 大于 1 的部分被削成平顶波的形状; 曲线 5 是使用形如 (10) ~ (12) 式的惩罚函数的情形, 惩罚强度系数取为 10^5 。可以看出, 图 1 中曲线 4、5 都是所需求的最优控制函数, 但曲线 5 没有破坏约束, 为光滑的, 便于控制实施。下面的结果如不声明均针对曲线 5 代表的最优控制函数的作用结果。

$$\begin{aligned}
 \text{收敛结果 } x_1(t_f) &= 100.003, \\
 x_2(t_f) &= 24.998 \\
 x_3(t_f) &= -0.538 \times 10^{-4}, \\
 x_4(t_f) &= -0.101 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

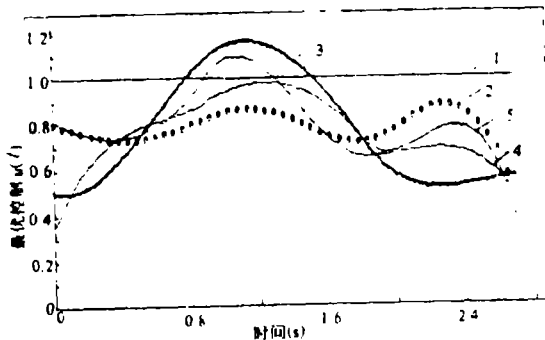


图2 各种计算方案所得最优控制 $u(t)$ 曲线对比

时间。综合而言，使用本文方法及软件解决该塔式起重机的最优定位控制问题，时间花费更小，对用户的要求更低，更容易被面向实际的工程应用人员所接受。计算还表明，本文对约束的两种处理方法是现实有效的，使用惩罚函数方法效果更好。

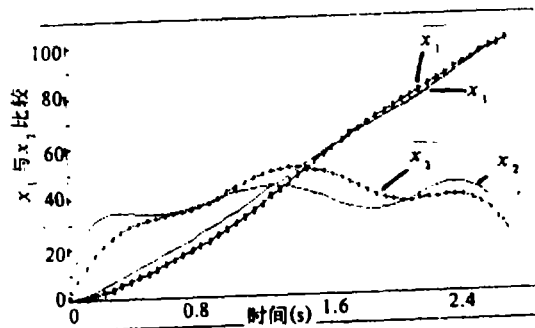


图3 状态转移轨迹对比(x_1, x_2)

完全符合本文的精度要求。最终收敛指标值为 $J=0.431 \times 10^{-4}$ ，最优参数

$$\begin{aligned}
 C^T &= [0.3808, 1.4792, 0.8640, 0.7509, 0.8041, \\
 &\quad -0.6303, -0.3661, -2.4300]
 \end{aligned}$$

由(5)~(8)式不难换算为所需的分段三次多项式各系数。

图3、4是 $x_1 \sim x_4$ 的状态轨迹。实线连接的曲线代表使用基于最优控制问题的共轭梯度直接数值解法的 ϵ -算法的结果^[1]，点线连接的曲线是使用本文方法及软件的结果。尽管本文方法得到的结果是一个次优解，各最优状态历程也不尽相同，但本文得到的最优控制满足指标要求，是可用的而且便于控制实施。

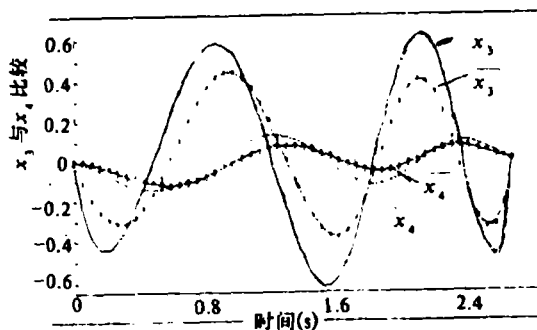


图4 状态转移轨迹对比(x_3, x_4)

本文方法的计算时间大约是 ϵ -算法的2倍，经历了777次单纯形搜索。收敛精度比要求的高一个数量级。尽管本文方法运算时间较长，但在运算前的准备工作阶段所花的时间远远少于文献[1]中程序运行的准备

四、结 论

本文基于直接参数化描述解法的思想及软件，使塔式起重机定位最优控制问题得到了满意的解决。使用亏数为2的分段三次样条函数描述方案，对控制函数的描述机动性强，可以解决一大类奇异或非奇异最优控制问题。

(下转第55页)

更符合求解结构不良问题的实际。更重要的是, 取证判断可由相应对象实体的决策人直接完成, 无须知识工程师的参与。这使得

KBS 投入运行后能继续进行知识获取, 从而具有良好的应用前景。

参 考 文 献

- [1] Klein, G. A., "Knowledge Engineering: Beyond Expert Systems", Information and Decision Technologies, Vol.16, No.1, 1990, pp.27-41.
- [2] 吴信东, 邹燕, 《专家系统技术》, 电子工业出版社, 1988年。
- [3] 蔡希尧, 《不确定信息的数值表示和计算方法》, 计算机科学, 1991年第5期, 第50~55页。
- [4] 郭伟, 周澄华, 《知识获取问题初探》, 自动化学报, Vol.16, No.3, 1990年。
- [5] Hwang, G. J. and Tseng, S. S., "EMCUD: A knowledge acquisition method which captures embeded meanings under uncertainty", Int. J. of Man-Machine Studies, 33(1990), pp.431-451.
- [6] 钱学森, 《关于思维科学》, 上海人民出版社, 1986年。
- [7] [美]L. 约翰逊, E. T. 克拉夫若著, 卢有杰等编译, 《专家系统技术指南》, 世界图书出版社, 1989年。

(上接第 72 页)

本文最大的特点是解决最优控制问题不需要编写任何用户程序, 极大地减少了用户的工作量。在计算机技术高度发展的今天, 不必过分关注计算机工作的时间。在计及人的工作量及工作时间时, 本文方法及软件就显得极富吸引力了, 尽管最终得到的仍然是一个数学意义上的次最优解。

在对系统及控制先验了解的知识基础上, 再选用合适的参数化描述结构, 能使问

题的这种简单解决更符合实际要求。进一步地, 可引入人工智能的思想, 使参数化描述结构的决定智能化、自动化。另一个发展方向是引入视算技术, 使输入数据文件的准备工作全人图交互化, 输出信息显示电影化。

本文的工作得到了窦惠芳的帮助, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 叶庆凯, 王肇明编著, 《优化与最优控制中的计算方法》, 科学出版社, 1986年。
- [2] 韩慧君编, 《系统仿真》, 国防工业出版社, 1985年。