

从雷达测速数据辨识弹丸符合阻力系数曲线的最优控制解法研究

陈阳泉 窦惠芳

(西安工业学院)

摘要 把从雷达测速数据提取弹丸符合阻力系数曲线问题看成是一个以符合阻力系数曲线为控制函数的奇异最优跟踪控制问题,给出了直接数值求解的具体算法;还应用了亏数为2的三次样条多项式表述符合阻力系数曲线的解法,使泛函极小问题转化为多变量参数极小问题,有效地克服了该奇异最优控制问题直接数值解法上的困难。处理了真实打靶数据,其结果表明,本文方法及软件有一定的实际应用价值。

关键词 最优控制; 飞行力学; 气动辨识; 外弹道; 数据处理

1 引言

在外弹道实践中,最关心的是弹丸的阻力系数曲线。虽然使用不同的手段如风洞试验、工程及理论预测等都可以得到阻力系数曲线,但由实际打靶数据直接辨识(提取)阻力系数曲线显然更有意义,它不仅提供了又一种校验的途径,并且由于是实弹试验的结果而更加可信。

从测速数据能够可靠地得到对弹速有显著影响的阻力系数曲线,最简单的数据处理方法是直接数值微分法^[1],另一种方法是文献[2]建议的微分校正法^[3~7]。直接数值微分法在数据处理中应尽可能避免使用,因为引入的误差很大。相对说来,微分校正法有一定的优越性。这要求将阻力系数曲线进行参量化表示,然后对这些参量进行寻优处理。由于阻力系数曲线函数关系的复杂性,在选取参量化表达形式时,要考虑到拟合的机动性问题。不合适的参量化表示形式将导致拟合机动性不足而常常不收敛。文献[8]采用了数据点间直线插值描述,得到的阻力系数曲线是一系列折线,必须经分段拟合处理才能应用^[9]。文献[10]首次运用最优控制方法得到了被看成为最优控制函数的阻力系数曲线 C_{df} 。本文采用另一种最优控制问题的描述方法,并基于文献[11]中的软件框架,使用共轭梯度法求解最优控制。作为比较,本文将 C_{df} 表示为亏数为2的三次样条函数形式,使泛函极小问题转化为多变量参数极小问题。此时, C_{df} 是一个次最优解,这种参数极小方法能有

本文于1991年6月17日收到,9月12日收到修改稿。

效地克服奇异最优控制直接数值解的困难。

需要明确的是,这里得到的 C_{df} 既不能看作是零攻角阻力系数曲线也不能简单地看作是全阻力系数曲线,而应该是对应于所使用的弹道模型而言的符合阻力系数曲线。

2 问题的描述

见图1, R是雷达, 其在地面坐标系中的位置是 (x_r, y_r) , 其中 x_r 为负值。G为炮口, P是弹丸质心。二自由度(2 DOF)质点弹道方程为

$$\begin{cases} \dot{u}_x = f_1(\mathbf{X}, C_{df}) = -\rho(y)vs(u_x - w_x)C_{df}/2m \\ \dot{u}_y = f_2(\mathbf{X}, C_{df}) = -\rho(y)vsu_yC_{df}/2m - g \\ \dot{X} = f_3(\mathbf{X}, C_{df}) = u_x \\ \dot{Y} = f_4(\mathbf{X}, C_{df}) = u_y \end{cases} \quad (1)$$

其中, $X^T = (u_x, u_y, x, y)$ 为系统(1)的状态向量, 参见图1, w_x 是 x 方向的风速。

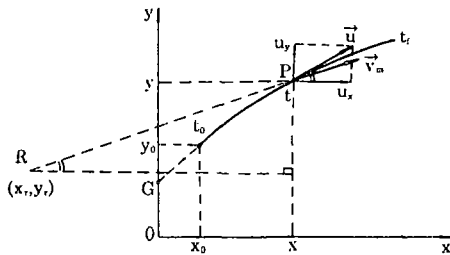


图1 二自由度雷达测速示意图

$\rho(y)$ 大气密度

v 弹相对风的速度,

$$v = [(u_x - w_x)^2 + u_y^2]^{1/2}$$

C_{df} 基于(1)式的符合阻力系数曲线

m 弹丸质量

s 弹丸特征面积

g 重力加速度

设 $X(t_0) = X_0$ 已知, 时间区间 $[t_0, t_f]$ 已知。

测得的速度 v_m 是雷达R至弹P间的径向速度。将 C_{df} 看成控制函数, 在某个 C_{df} 下由 X_0 及(1)式唯一决定一条弹道。此时可将弹道切向速度 $u(u = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2})$ 转换至雷达测速的径向速度, 记为 v_d , 令

$$r_1 = x - x_r, \quad r_2 = y - y_r, \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

则有

$$v_d = (u_x r_1 + u_y r_2) / r \quad (2)$$

取泛函指标为

$$J[C_{df}] = \int_{t_0}^{t_f} L(X, C_{df}, t) dt \quad (3)$$

其中, $L = (v_d - v_m)^2$, L 不显含 C_{df} 和时间 t 。设终端自由。(1)、(3)式构成了一个奇异跟踪控制问题。

3 共轭梯度法解奇异最优控制

引入Hamilton函数 $H(C_{df}, X, t)$, 简写为 H , 有

$$H = L + \lambda^T f \quad (4)$$

其中, $f^T = [f_1, f_2, f_3, f_4]$, 见(1)式; L 见(3)式。

$\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$ 为伴随向量。

由最优控制理论^[11, 12], 则

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\frac{\partial L}{\partial X} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial X} \quad (\lambda(t)) \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (5)$$

泛函 $J[C_{df}]$ 在Hilbert空间中相对于 C_{df} 的梯度为

$$\nabla J[C_{df}] = \frac{\partial H}{\partial C_{df}} = \frac{\partial L}{\partial C_{df}} + \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial C_{df}} \quad (6)$$

控制函数 C_{df} 受如下约束

$$C_{df}(t) \in [C_{dfmin}, C_{dfmax}] \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

引入约束算子 \mathcal{N}

$$C_{df}(t) = \mathcal{N}[C_{df}^0(t)] = \begin{cases} C_{dfmin} & , C_{df}^0(t) < C_{dfmin} \\ C_{df}^0(t) & , C_{df}^0(t) \in [C_{dfmin}, C_{dfmax}] \\ C_{dfmax} & , C_{df}^0(t) > C_{dfmax} \end{cases} \quad (7)$$

其中, $C_{df}^0(t)$ 是一个试验控制。

共轭梯度法求解最优控制的步骤如下:

①给定小正数 ε 及最大迭代次数 N_i , 选定一个初始控制 $C_{df}^0(t)$ 并令

$$\bar{C}_{df}(t) = \mathcal{N}[C_{df}^0(t)]$$

②用 $\bar{C}_{df}(t)$ 和 x_0 从 t_0 到 t_f 积分(1)式, 得到 $\bar{X}(t)$

③用 $\bar{C}_{df}(t)$ 及 $\bar{X}(t)$ 从 t_f 至 t_0 反向积分(5)式, 得 $\bar{\lambda}(t)$

④由 $\bar{C}_{df}(t)$ 、 $\bar{X}(t)$ 及 $\bar{\lambda}(t)$ 计算 $J[C_{df}(t)]$ 在 $\bar{C}_{df}(t)$ 处的梯度, 见(6)式

⑤令 $g^{(0)}(t) = h^{(0)}(t) = -\nabla J[\bar{C}_{df}(t)]$, 若 $\|g^{(0)}(t)\| < \varepsilon$, 停止; 否则令 $i = 0$,

$C_{df}(t) = \bar{C}_{df}(t)$ 进行步骤⑥

⑥用单维搜索求出 μ^* ($\mu^* > 0$)使

$$J[C_{df}(t) + \mu^* h^{(i)}(t)] = \min_{\mu} \{J[C_{df}(t) + \mu h^{(i)}(t)] \mid \mu > 0\}$$

⑦ $C'_{df}(t) = \mathcal{N}[C_{df}(t) + \mu^* h^{(i)}(t)]$, 用 $C'_{df}(t)$ 和 X_0 从 t_0 至 t_f 积分(1)式得 $X'(t)$

⑧由 $C'_{df}(t)$ 、 $X'(t)$ 从 t_f 到 t_0 反向积分(5)式得到 $\lambda^{(i)}$, 计算 $\nabla J[C'_{df}(t)]$

⑨若 $\|\nabla J[C'_{df}(t)]\| < \varepsilon$, 停止; 否则令

$$\begin{aligned} g^{(i+1)}(t) &= -\nabla J[C'_{df}(t)] \\ h^{(i+1)}(t) &= g^{(i+1)}(t) + \beta h^{(i)}(t) \end{aligned}$$

其中, $\beta = \langle g^{(i+1)}(t) - g^{(i)}(t), g^{(i+1)}(t) \rangle / \|g^{(i)}(t)\|^2$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示Hilbert空间中两个函数向量内积, 且 $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$

⑩令 $i = i + 1$, 若 $i > N_i$, 停止; 否则令 $C_{df} = C'_{df}$, 转步骤⑥

由于 C_{dfmin} 及 C_{dfmax} 能较好地决定而初始控制 $C_{df}^0(t)$ (通常设为直线)亦可适当给定, 上述算法是收敛的。但由于是奇异控制问题, 共轭梯度方法的收敛速度很差。本文采用 ε -算法, 即在(3)式中加进一项

$$\frac{\varepsilon_k}{2} \int_{t_0}^{t_f} C_{df}^2(t) dt, \quad \varepsilon_k > 0$$

使问题成为非奇异的, 然后对一系列满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ 的 ε_k 解相应的非奇异控制。这大大改善了收敛性, 但计算量是很大的。

由解得的最优控制 $C_{df}(t)$ 和最优状态 $X(t)$ 可以得到符合阻力系数曲线 $C_{df}(M)$ 。

4 参数最优化解法

本文采用亏数为 2 的三次样条函数表示 $C_{df}(t)$, 可将泛函极小问题转化为多变量参数极小问题。

将 $C_{df}(t)$ ($t \in [t_0, t_f]$) 分为 m 段, $m+1$ 个分段节点记为 $t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = t_f$ 。又记 t_i 节点处对应 $C_{df}(t)$ 的函数值及导数值分别为 f_i 和 d_i 。考察 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 知由 $f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}$ 可唯一决定一个三次 Hermite 型多项式 $C_{dfi}(t)$, 可以表示为

$$\begin{aligned} C_{dfi}(t) &= [\gamma_1(\tau_i), \gamma_2(\tau_i), \gamma_3(\tau_i), \gamma_4(\tau_i)] [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^T \\ &= [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \alpha_{4i}] [1, t, t^2, t^3]^T \\ &= [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}] [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3]^T \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\tau_i = (t - t_i) / h_i$, $h_i = t_{i+1} - t_i$, 显然 $\tau_i \in [0, 1]$, 容易得到

$$A_1 \cdot [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T = [f_i, d_i, f_{i+1}, d_{i+1}]^T \quad (9)$$

其中,

$$A_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_i^{-1} & 2h_i^{-1} & 3h_i^{-1} \end{Bmatrix} \quad \text{且} \quad A_1^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ -3 & -2h_i & 3 & -h_i \\ 2 & h_i & -2 & h_i \end{Bmatrix}$$

那么

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1(\tau_i) \\ \gamma_2(\tau_i) \\ \gamma_3(\tau_i) \\ \gamma_4(\tau_i) \end{Bmatrix}^T = [1, \tau_i, \tau_i^2, \tau_i^3] \quad A_1^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 - 3\tau_i^2 + 2\tau_i^3 \\ h_i(\tau_i - 2\tau_i^2 + \tau_i^3) \\ 3\tau_i^2 - 2\tau_i^3 \\ h_i(-\tau_i^2 + \tau_i^3) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

以及

$$[\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T = A_2 [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \alpha_{4i}]^T \quad (11)$$

其中,

$$A_2 = \begin{Bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \\ 0 & h_i & 2h_i t_i & 3h_i t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^2 & 3h_i^2 t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^3 \end{Bmatrix} \quad \text{且} \quad A_2^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & -h_i^{-1} t_i & h_i^{-2} t_i^2 & -h_i^{-3} t_i^3 \\ 0 & h_i^{-1} & -2h_i^{-2} t_i & 3h_i^{-3} t_i^2 \\ 0 & 0 & h_i^{-2} & -3h_i^{-3} t_i \\ 0 & 0 & 0 & h_i^{-3} \end{Bmatrix}$$

不难看出, $C_{df}(t) \in C^1[t_0, t_f]$ 。由于分段数和分段节点由用户决定, $C_{df}(t)$ 的机动性得到保证且是光滑的。记

$$c_{2i-1} = f_i, \quad c_{2i} = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, m+1)$$

$$C^T = [c_1, c_2, \dots, c_{2m+2}]$$

极小化 $J[C^T]$ 的主要任务是得到 $\partial J / \partial c_i$ 及 $\partial^2 J / \partial c_i \partial c_i$ 。记 $\varphi_i = \partial J / \partial c_i$ ($i, j = 1, 2, \dots, 2m+2$)

由最优控制原理^[11,12], 有

$$\partial H / \partial C_{df}(t) = 0 \quad (12)$$

$$\text{由(4)式知, } \partial L / \partial C_{df}(t) = -\partial(\lambda^T f) / \partial C_{df}(t) \quad (13)$$

亦即

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = -\frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial C_{df}(t)} \quad (13')$$

所以,

$$\begin{aligned} \varphi_i &= -\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial C_{df}(t)} dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\rho(y)sv}{2m} [\lambda_1(u_x - w_x) + \lambda_2 u_y] dt \end{aligned} \quad (14)$$

那么,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_i} &= \frac{\partial^2 J}{\partial c_i \partial c_i} = -\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \rho(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial c_i} \cdot \frac{sv}{2m} [\lambda_1(u_x - w_x) + \lambda_2 u_y] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\rho(y)s}{2m} \left(\frac{\partial u_x}{\partial c_i} \cdot \frac{u_x - w_x}{v} + \frac{\partial u_y}{\partial c_i} \cdot \frac{u_y}{v} \right) [\lambda_1(u_x - w_x) + \lambda_2 u_y] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} \cdot \frac{\rho(y)sv}{2m} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial c_i} (u_x - w_x) + \frac{\partial \lambda_2}{\partial c_i} u_y + \lambda_1 \frac{\partial u_x}{\partial c_i} + \lambda_2 \frac{\partial u_y}{\partial c_i} \right] dt \end{aligned} \quad (15)$$

由(1)式两边对 c_i 偏导可以得到 $\partial X / \partial c_i$ 的微分方程组

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X}{\partial c_i} \right) = \frac{\partial}{\partial c_i} f(X, c_{df}), \quad \left. \frac{\partial X}{\partial c_i} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (16)$$

类似地, 由(5)式两边对 c_i 偏导可以得到 $\partial \lambda / \partial c_i$ 的微分方程组

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial c_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right), \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial c_i} \right|_{t=t_f} = 0 \quad (16')$$

由此可得到(15)式中的 $\partial X / \partial c_i$ 和 $\partial \lambda / \partial c_i$ 。

应注意 $\partial C_{df}(t) / \partial c_i$ 只在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上不恒为零, 这里 $k = [(i+1)/2]$, $[\cdot]$ 表示取整操作, 且

$$\frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} = \begin{cases} 0, & t \notin [t_k, t_{k+1}], \\ \gamma_1(\tau_k), & t \in [t_k, t_{k+1}], \text{ 且 } i \text{ 为奇数} \\ \gamma_2(\tau_k), & t \in [t_k, t_{k+1}], \text{ 且 } i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (17)$$

至此可应用 Newton-Raphson 迭代, 即

$$C^{(k+1)} = C^{(k)} + \Delta C^{(k)} \quad (18)$$

$$A^{(k)} \cdot \Delta C^{(k)} = B^{(k)} \quad (19)$$

其中, k 为迭代次数, $\Delta C^{(k)}$ 为第 k 次迭代的优化参量增量, 矩阵 $A^{(k)}$ 、 $B^{(k)}$ 的元 a_{ij} 和 b_i

分别为

$$a_{ij} = \partial\varphi_i / \partial c_j; \quad b_i = -\varphi_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2m+2) \quad (20)$$

算法的步骤是

①由 $C^{(k)}$ 参数表示的 $C_{df}(t)$ 及 $X_0, \partial X(t) / \partial c_i|_{t=t_0} = 0$ 从 t_0 至 t_f 共同正向积分(1)、(16)式得到 $X(t)$ 及 $\partial X(t) / \partial c_i$;

②由 $X(t), \partial X(t) / \partial c_i$ 以及 $\partial\lambda(t_f) / \partial c_i| = 0$ 从 t_f 到 t_0 共同反向积分(5)、(16')式得到 $\lambda(t)$ 及 $\partial\lambda(t) / \partial c_i$;

③由式(14)、(15)计算 φ_i 及 $\partial\varphi_i / \partial c_i$ 形成矩阵 $A^{(k)}, B^{(k)}$;

④解线性方程组(19)式得到 $\Delta C^{(k)}$, 由(18)式计算得到 $C^{(k+1)}$ 。由此形成迭代直至 J 值没有明显改善为止或到达给定的最大迭代次数为止。

正向或反向积分各需积 $8m+12$ 个微分方程, 当 m 稍大时, 计算代价是很大的。为减小计算量, 对(3)式的指标函数直接偏导得到

$$\varphi_i = \partial J / \partial c_i = \int_{t_0}^{t_f} 2(v_d - v_m) \frac{\partial v_d}{\partial c_i} dt \quad (21)$$

其中 $\partial v_d / \partial c_i$ 由(2)式易得到具体表达式。

若取

$$\partial\varphi_i / \partial c_i = 2 \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial v_d}{\partial c_i} \frac{\partial v_d}{\partial c_i} dt \quad (22)$$

以(21)、(22)式分别代替(14)、(15)式就构成了[2]中使用的微分校正法。这里忽略了 $2(v_d - v_m)\partial^2 v_d / \partial c_i \partial c_i$ 项。当迭代收敛时, 该项的影响将越来越小。这种方法比前述基于最优控制原理形成的严格的Newton-Raphson法迭代次数要略多; 对初值要求更为严格。幸运的是, 对于多数实际工程问题, 初值的概念值能恰当决定, 所以这种简化的方法常常有效, 尽管缺乏数学上的严格性。由于可省略反向积分, 少解了 $8m+12$ 个微分方程, 计算量下降了一半。

进一步从抓主要矛盾的思想出发, 可以对从雷达测速数据提取阻力曲线这一具体问题作进一步简化。由于 $C_{df}(t)$ 实质上仅对弹的切向速度 v 的大小有显著影响, 可将 v 视为主要状态, 大胆地设Hamilton函数为

$$H = L + \lambda \left[-\frac{1}{2} \rho(y) s v^2 C_{df}(t) / m \cdot \frac{\vec{v}}{v} - g \sin\theta \right] \quad (23)$$

其中, 为便于问题简化, 令

$$L = (u - u_t)^2, \quad \lambda \text{ 为标量伴随函数}$$

u_t 为雷达测速 v_m 的弹道切向意义上的变换值, 视为已知测量值。由图1易知

$$u_t = v_m \left(\frac{r_1}{r} \frac{u_x}{u} + \frac{r_2}{r} \frac{u_y}{u} \right) = v_m \cdot \frac{v_d}{u} \quad (24)$$

又可设 θ 与 $C_{df}(t)$ 无关, $\partial v / \partial u \approx 1$, 则有

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -2(u - u_t) + \lambda \rho(y) s v C_{df}(t) / m, \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (25)$$

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2}\rho(y)sv^2C_{df}(t)/m - g\sin\theta \quad (26)$$

$$\varphi_i = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\rho(y)sv^2\lambda \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_i} / m dt \quad (27)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\rho(y)s \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_j} \left[v^2 \frac{\partial \lambda}{\partial c_j} + 2\lambda v \frac{\partial u}{\partial c_j} \right] / m dt \quad (28)$$

由(25)、(26)式得到 $\partial\lambda/\partial c_j$ 及 $\partial u/\partial c_j$ 的微分方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial c_j} \right) = -\frac{1}{2}\rho(y)s \left[v^2 \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_j} + 2C_{df}(t)v \frac{\partial u}{\partial c_j} \right] / m \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial c_j} \right) = -2 \frac{\partial u}{\partial c_j} + \rho(y)s \left[\lambda v \frac{\partial C_{df}(t)}{\partial c_j} + \lambda C_{df}(t) \frac{\partial u}{\partial c_j} + v C_{df}(t) \frac{\partial \lambda}{\partial c_j} \right] / m \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial c_j} \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial c_j} \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m+2$$

这样,从 t_0 至 t_f 正向积分(1)、(29)式然后从 t_f 到 t_0 反向积分(25)、(30)式即可得到 φ_i 及 $\partial\varphi_i/\partial c_j$,应用Newton-Raphson迭代。共需积 $4m+9$ 个微分方程,计算量又减小了近 $1/2$ 。如果应用前述的微分校正法,那么

$$\varphi_i = \int_{t_0}^{t_f} 2(u-u_i) \frac{\partial u}{\partial c_i} dt \quad (31)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} = \int_{t_0}^{t_f} 2 \frac{\partial u}{\partial c_i} \frac{\partial u}{\partial c_j} dt \quad (32)$$

此时仅需积分(1)、(29)式,共有 $2m+7$ 个微分方程,计算量又能减小近一半。

计算实践表明,上述各种方法的结果是一致的。这种受工程师欢迎并紧紧抓住了问题本质的简化处理思想是祁载康教授提出的并在[4]、[5]中得到了应用。

本节介绍的参数最优化方法可有效地解决广泛的一类最优控制问题。它可归于Ritz类方法。但笔者认为称这种方法为“最优动态拟合”(optioma dynamic fitting)法最妥。

5 实际打靶数据处理结果和讨论

在处理实际打靶数据之前,使用仿真数据验证了软件的正确性。仿真数据的产生使用了文献[13]~[15]中的软件,并加入了与雷达测速相当的测试误差。具体图表数据应属软件文档内容,这里不再列出。

使用某基地的真实打靶雷达测速数据,见图2中 V_m-t 曲线。由本文的最优控制解法(OC)和参数最优化解法(PO)均得到 C_{df} 。使用的有关数据如下:

$$m = 44.99\text{kg}; \quad l = 0.155\text{m}; \quad s = l^2\pi/4$$

$$x_0, y_0, u_0, \theta_0 \text{ 分别为 } 274.6\text{m}, 410.7\text{m}, 656.182\text{m/s}, 42.98^\circ;$$

$$x_r, y_r \text{ 分别为 } -67.4\text{m}, 150.0\text{m}; \text{ ICAO标准大气。}$$

在OC中, $C_{df\min}$ 、 $C_{df\max}$ 分别取0.05和0.50且 $C_{df}^0(t) = 0.30$;在PO中,分段数 $m = 6$,

参数初值 $C^{(0)}$ 为 $c_{2i}^{(0)} = 0.30$, $c_{2i}^{(0)} = 0$, ($i = 1, 2, \dots, m$) 即 $C_{df}^0(t) = 0.30$ 。
 $V_m - t$ 已作重叠式等距插值, 等时步距为 0.3 秒。PO 的节点取 0.6~8.1~15.0~20.1~
 25.2~28.2~31.5。定义

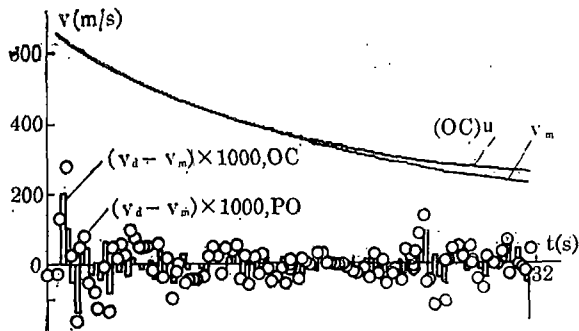


图 2 两种处理方法的误差对比

$$RMS = \sqrt{J/(t_f - t_0)} \quad (33)$$

图 2 中, OC 的 RMS 为 0.04 m/s, PO 的 RMS 为 0.0915 m/s。

图 3 是 $C_{df}(t)$ 的曲线对比, 图 4 是 $C_{df}(M)$ 的曲线对比。本文方法推导都以 t 为自变量, 较易理解。也很容易变换成以马赫数 M 为自变量的情形。计算表明, 它们是等价的。

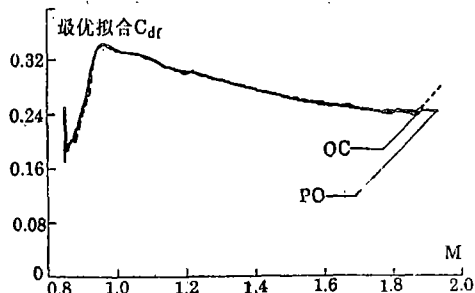


图 3 两种处理方法的 $C_{df}(t)$ 曲线对比

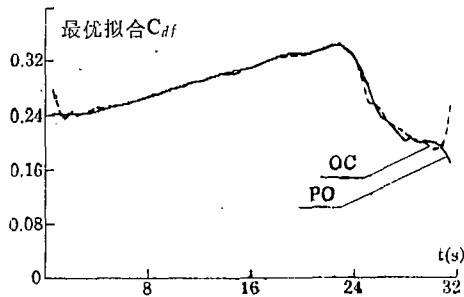


图 4 两种处理方法的 $C_{df}(M)$ 曲线对比

从图 2~4 可以看出, OC 法比 PO 法更加充分地利用了测量数据。OC 法得到的 C_{df} 比 PO 法得到的 C_{df} 机动性更强。事实上, PO 法得到的是一个次最优解。但 PO 法较有效地克服了 OC 法数值计算上的困难。从实用角度来看, 两者都是可用的。OC 得到的 C_{df} 有不合物理本质的波动, 这可用文献[9]中的软件拟合后再投入使用。这种做法能够有效地避免 PO 法中分段数及分段节点选择的盲目性。

参 考 文 献

- 1 杨志远, 秦英孝. 阻力系数飞行测定法的研究发展, 兵工学报, 1990, (2).
- 2 Chapman G T & Kirk D B. A method for extracting aerodynamic coefficients from free flight data, AIAA, 18(4)
- 3 刘世平. 从弹丸自由飞行数据换算气动系数的优化计算方法. 华东工学院学报, 1986, (2).
- 4 刘中淳. [硕士学位论文]. 北京理工大学. 1987.
- 5 金京春. [硕士学位论文]. 北京理工大学. 1988.
- 6 孙容磊. 由雷达测速数据提取弹丸阻尼系数的优化算法. 系统工程与电子技术, 1990(8).
- 7 陈阳泉. 非线性靶枪数据处理. 系统工程与电子技术, 1991(3).

- 8 Bartelson N. A Method for Determination of Aerodynamic Drag By Doppler Data. 1-st Int. Ballistics Symp. 1975. Orlando.
- 9 陈阳泉, 窦惠芳. 带约束多段多项式拟合算法及软件. 气动实验与测量控制, 1991, 5(3):78~79
- 10 李明山. 硕士学位论文. 北京理工大学, 1989.
- 11 叶庆凯, 王箬明编著. 优化与最优控制中的计算方法. 北京: 科学出版社, 1986.
- 12 吴受章编著. 应用最优控制. 西安: 西安交通大学出版社, 1986.
- 13 陈阳泉. 旋转稳定弹弹道计算模型与软件研究(I)、(II)、(III). 兵工学报弹箭分册, 1990,(3),(4),1991,(1).
- 14 陈阳泉. 旋转稳定弹弹道计算的快速四自由度模型. 西安工业学院学报, 1990, (3,4).
- 15 陈阳泉. 一个新的旋转稳定弹弹道计算刚体六自由度和五自由度模型. *ibid.*

RESEARCHES ON THE OPTIMAL CONTROL SOLUTION OF IDENTIFYING FITTING DRAG COEFFICIENT CURVE FROM RADAR MEASURED VELOCITY DATA

Chen Yangquan Dou Huifang
(Xi'an Institute of Technology)

Abstract In this paper, identifying(extracting)fitting drag coefficient curve from radar measured velocity data is regarded as a singular optimal tracking control problem where the fitting drag curve is the control function. The description of this singular optimal control problem and the conjugate gradient method to solve the problem are given. Also, for comparative purpose, the method which applies the piecewise Hermite type polynomials to present the fitting drag coefficient curve is given, which converts the functional minimization problem to multivariable parametric minimization problem and overcomes some disadvantages in computational cost. By using the methods and relevant software of this paper, the result reduced from real firing practice data shows the positive applicable value of the work of the present article.

Key words optimal control; flight dynamics; aerodynamic identification; exterior ballistics; data reduction