

部分状态反馈有限时间调节 LQR 直接次优设计*

陈阳泉 胡建忠

(电子工程系)

摘要 提出了部分状态反馈有限时间调节的 LQR 直接次优设计的方法. 结合协态方程, 通过正反向积分, 形成 Newton-Raphson 迭代. 指标泛函中的状态、控制加权阵可任意选择, 且可考虑非常规项, 推广了 LQR 并避免了求解 RDE 或 ARE.

关键词 线性系统理论 部分信息 有限时间调节 最优控制 次最优化 Newton-Raphson 迭代

中图分类号 TP13 O232 O242.23

引言

线性二次调节(LQR)在现代控制理论中占有重要的地位^[1~4]. 对于无限时间调节问题, LQR 归结为代数 Riccati 方程(ARE)的求解. ARE 求解方法有很多^[5~8], 其中矩阵符号函数法最引人注目^[9~12]. 无限时间调节仅是有限时间调节的一个特例. 有限时间调节问题则归结为 Riccati 微分方程的求解(RDE). RDE 求解要比 ARE 求解困难得多, 所以, 针对有限时间调节 LQR 的讨论相对较少^[13,14], 而对于有限时间部分状态反馈 LQR 的研究还未见报道. 本文使用多变量参数优化方法, 运用 Newton-Raphson 迭代, 解决了有限时间部分状态反馈 LQR 的问题, 避免了求解 ARE 或 RDE, 而且对泛函指标、状态及控制加权阵的约束放松, 并可以在指标中加入其它形式的积分项, 这显然对 LQR 的实际应用具有积极意义.

1 问题的提法

考虑线性系统(n 状态, m 输入)

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1)$$

* 1993-09-26 收稿

时间 $t \in [t_0, t_f]$, $X(t_0) = X_0$. 已知, 且 $m \leq n$

对状态 X 作线性观测 $Z \in R^l$

$$Z = MX, \quad M \in R^{l \times n}; \quad l = \text{rank}(M) \leq n \quad (2)$$

部分线性反馈控制

$$U = -KZ = -KMX, \quad K \in R^{m \times l} \quad (3)$$

二次型泛函指标为

$$J[U] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + U^T R U) dt + \frac{1}{2} X^T(t_f) S X(t_f) \quad (4)$$

A, B, M, Q, R, S 已知, 求 K 使(4)式极小.

2 Newton-Raphson 迭代

对 K 阵按列拉直, 形成列向量 $\hat{K} \in R^{ml \times 1}$

$$K = [K_1, K_2, \dots, K_l] \quad (5)$$

其中 $K_i = [k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{im}]^T \quad i = 1, 2, \dots, l$

则 $\hat{K} = [K_1^T, K_2^T, \dots, K_l^T]^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{ml}]^T \quad (6)$

$$\alpha_i = k_{pq}, \quad q = \left[\frac{i-1}{m} \right] + 1, \quad p = i - (q-1)m \quad (7)$$

其中, $[\cdot]$ 表示取整操作; $i = 1, 2, \dots, ml$; $p = 1, 2, \dots, m$; $q = 1, 2, \dots, l$.

记 Hamilton 函数 $H(U, \lambda, X, T)$, 简记为 H

$$H = -(L + \lambda^T f) \quad (8)$$

其中 $L = \frac{1}{2} (X^T Q X + U^T R U), \quad f = AX + BU$

由极小值原理

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{\partial H}{\partial X} = (Q + M^T K^T R K M) X + (A - B K M)^T \lambda \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial X(t_f)} \left[\frac{1}{2} X^T(t_f) S X(t_f) \right] = S X(t_f) \end{cases} \quad (9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad (10)$$

即 $\frac{\partial L}{\partial U} = -\frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial U} \quad (11)$

所以 $\nabla_K J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial K} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial(\lambda^T f)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial K} dt = \int_{t_0}^{t_f} B^T \lambda X^T M^T dt \quad (12)$

可写成

$$\frac{\partial J}{\partial k_{pq}} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{t=i}^n \left(\sum_{s=1}^m b_{ps} \lambda_{st} \right) m_{tq} \right] dt \quad (13)$$

其中, p, q 与 i 的关系见(7)式, b_{ps} 为 B 的 p 行 s 列元素, λ, x, m_{tq} 类同, 分别为 λ, X, M 的元素.

至此, 可得到二阶梯度阵

$$\nabla_{\hat{K}}^2 J = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} \right) \right]_{i,j} \in R^{ml \times ml} \quad i, j = 1, 2, \dots, ml \quad (14)$$

$$\text{其中 } \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} \right) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{s=1}^n b_{ps} \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial \alpha_j} \cdot x_i \right) m_{iq} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{s=1}^n b_{ps} \cdot \lambda_s \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right) m_{iq} \right] d\tau$$

为了获得(14)式中的 $\frac{\partial \lambda_s}{\partial \alpha_j}$ 及 $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$, 可对(1), (9)式两边对 K 求偏导, 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X}{\partial k_{pq}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \right) = (A - BKM) \frac{\partial X}{\partial k_{pq}} - B \frac{\partial K}{\partial k_{pq}} \cdot MX \quad (15)$$

其中, $\frac{\partial K}{\partial k_{pq}} \in R^{m \times l}$, 其元素除 p 行 q 列为 1 外均为 0. 且 $\frac{\partial X}{\partial k_{pq}}|_{t=t_0} = 0, p=1, 2, \dots, m; q=1, 2, \dots, l; i=1, 2, \dots, ml$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial k_{pq}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_i} \right) = (Q + M^T K^T R K M) \frac{\partial X}{\partial k_{pq}} + (A - BKM)^T \frac{\partial \lambda}{\partial k_{pq}} \\ &\quad + M^T \left(\frac{\partial K^T}{\partial k_{pq}} \cdot R + R^T \cdot \frac{\partial K}{\partial k_{pq}} \right) X - (B \frac{\partial K}{\partial k_{pq}} M)^T \lambda \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\frac{\partial \lambda}{\partial k_{pq}}|_{t=t_f} = 0, p=1, 2, \dots, m; q=1, 2, \dots, l; i=1, 2, \dots, ml$.

首先, 同时正向积分(1), (15)式, 然后, 同时反向积分(9), (16)式, 由(13), (14)式得到 $\nabla_K J$ 及 $\nabla_K^2 J$. 所以, 形成的 Newton-Raphson 迭代公式为

$$\hat{K}^{(s+1)} = \hat{K}^{(s)} + \Delta \hat{K}^{(s)} \quad (17)$$

$$\nabla_K^2 J \cdot \Delta \hat{K}^{(s)} = - \nabla_K J \quad (18)$$

3 讨论

上述推导给出了有限时间部分状态反馈 LQR 的直接次优解法, 避免了求解 ARE 或 RDE, 并且对状态及控制加权阵 Q, R 没有约束条件. 针对本文提出的算法, 编写了通用性很强的求解软件, 通过了大量的测试运行, 发现并解决了如下问题.

3.1 状态初值问题

对标准的 LQR 问题, 不存在状态初值问题, 本文方法则需要设定一个状态初值 X_0 . 应指出 X_0 的选取可任意, X_0 不影响 K 的收敛值但对指标的 $J[U]$ 有直接影响, 直观上看, X_0 亦不影响 K 的收敛性质.

3.2 K 的初值问题

K 的初值直接影响本算法的收敛性. $K^{(0)}$ 应使闭环系统稳定, 才能保证算法收敛, 为此设置了 $K^{(0)}$ 的交互输入及闭环系统稳定性检验. $K^{(0)}$ 的选择具有一定的尝试性.

3.3 可控性问题

由于使用了部分状态反馈, 则系统的部分能控性要得到确认, 要对每一个状态是否可控作出判断.

3.4 积分步长及无限时间的调节问题

积分步长由系统的闭环特征根自动决定, 因为系统的最大闭环特征根决定积分步长. 为便于反向积分, 采用定步长积分. 当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, 按系统的最小闭环特征根决定合适的 t_f .

3.5 其它形式的泛函指标积分项

本文方法的一个重要的特点是在(4)式中可加入其它形式的项,如 $t \cdot X^T Q X$, $\sum_{j=1}^n |x_j| \cdot t$ 等,针对具体形式,作相应推导,改变(9),(12),(13),(14),(16)式即可,这里不再一一推导.

4 示例

本例引自文献[1]. 这是一个典型的部分状态反馈. 此处, $n=3, m=1, l=1$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$M = [1 \ 0 \ 0], \quad S = 0 \quad R = 1 \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

反馈控制律为 $u = kx_1$

$t_0=0, t_f=\infty$, 下面运算中取 $t_f=10$, 积分步长 $h=0.1$, 正反积分均使用 RK-4 方法, 需注意, 反向积分 RK-4 需要对正向积分所得数组进行插值, 为便于比较, 均以 15 次迭代结果作对照. 附表给出了不同状态初值, 不同指标函数形式的结果对比, 所有的运行 K 初值均同为 1.

附表 不同状态初值、不同指标形式的结果比较

状态初值	$J_1 = \int_0^{t_f} (X^T Q X + U^T R U) dt$			$J_2 = J_1 + \int_0^{t_f} t \cdot x_1 dt$		
	k	$\partial J_1 / \partial k$	J_1	k	$\partial J_2 / \partial k$	J_2
$X_0 = [1 \ 2 \ 2]^T$	-0.9137	-0.0252	53.53	-0.9974	-0.1778	74.10
$X_0 = [2 \ 1 \ 1]^T$	-0.8714	-0.0285	36.04	-0.9507	0.4467	51.27
$X_0 = [-1 \ -1 \ -1]^T$	-0.9014	-0.0133	19.40	-1.015	-0.0092	31.22

从附表可以看出, 本文方法不受状态初值的影响, 最终收敛 K 几乎相同, 从图 1 还可以清楚地看到, 状态初值对收敛速度的影响是很小的.

根据文献[1]中的分析, 稳定的 K 值应取 $K \geq -2.618$, 本例 K 的初值及收敛解均满足这一条件. 应该看到, K 的初值远离了收敛域, 这说明, 只要初始 K 能使系统稳定, 本文的方法就总是有效的, 采用部分状态反馈, 常规的 LQR 解法显得无能为力, 附表指标形式 J_2 , 包含了状态 x_1 的 ITAE 项, 表明了本文的方法能使得 LQR 更具实际应用价值. 图 2 是 $X_0 = [1, 2, 2]^T$. 使用 J_1, J_2 的最佳调节曲线对比(状态 x_1). 由于 t_f 取值不能达到无穷大, 由于使用了有限步的 Newton-Raphon 迭代, 所以, 本文的方法毕竟是一个次最优解, 但其结果是有工程应用意义的. 附表中的 $\partial J / \partial k$ 为灵敏度, 可用于决定如何选择部分状态反馈, 详见文献[13].

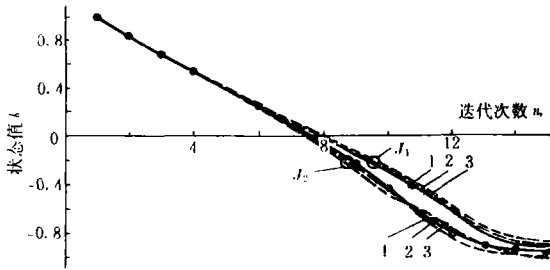
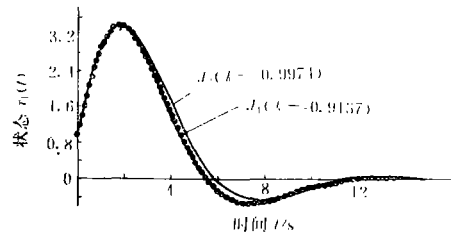


图1 状态初值对收敛性的影响

图2 两种指标形式下状态 x_1 的最佳调节曲线对比

5 结 论

本文提出的部分状态反馈,有限时间调节 LQR 直接次优设计方法,主要是通过 Newton-Raphson 迭代的多变量参数优化方法. 指标泛函中的状态、控制加权阵可任意选择,且可考虑非常规项,对 LQR 实际应用有积极意义,并避免了求解 ARE 或 RDE.

由于有限时间调节的最优反馈阵应该是时变的 $K(t)$,在本文中设为常阵,这是本质上的次优方法,通过适当的参数化描述, $K(t)$ 可以表示成某个基函数的线性组合,如三次样条函数,使用本文的方法,可以得到更接近最优的次优结果,结合文献[15][16]和本文,是不难实现的,这是进一步要做的工作.

参 考 文 献

- 1 尤昌德编著. 线性系统理论基础. 西安:西安交通大学出版社,1987.
- 2 谢绪恺编,现代控制理论基础. 沈阳:辽宁人民出版社,1981.
- 3 叶庆凯,王肇明编著. 优化与最优控制中的计算方法. 北京:科学出版社,1986.
- 4 毛剑琴等编著. 控制系统的计算机辅助设计. 北京:北京航空学院出版社,1988.
- 5 姜长生. 控制系统中的矩阵方程的数值解. 信息与控制,1986,15(6)
- 6 Laub A J. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. IEEE,1979,AC-24(6): 913~921
- 7 叶庆凯,王肇明. 代数 Riccati 方程的一种快速解法(1):单输入情况. 控制理论与应用,1981(3)
- 8 Levine W S, Athans M. On the determination of the optimal constant and output-feedback gains for linear multivariable Systems. IEEE,1970,AC-15:44~48
- 9 Denman E D,Beavers A N. The matrix sign function and computation in systems. Math & Comp,1976,Appl
- 10 Balzer L A. Accelerated convergence of the matrix sign function method of solving Lya-

punov; Riccati & other matrix equations. Int J of Control, 1980.

- 11 涂健等. 一种求解代数 Riccati 方程的新方法—矩阵符号函数法, 华中工学院学报, 1986.
- 12 陈阳泉. 矩阵符号函数法求解 ARE 的 N 阶收敛迭代格式. 西安工业学院学报, 1989, 9(1): 34~42
- 13 孙增圻. 二次型性能函数对反馈系数阵灵敏度的计算及其在部分状态反馈次优控制设计中的应用. 自动化学报, 1987, 13(5): 397~399
- 14 李树生等. 线性定常系统次最优控制的一个算法. 控制理论与应用, 1986, 3(2): 43~47
- 15 陈阳泉等. 航弹符合阻力系数曲线的最佳动态拟合研究. 西安工业学院学报, 1992, 12(2)
- 16 陈阳泉, 窦惠芳. 从雷达测速数据辨识弹丸符合阻力系数曲线的最优控制解法研究. 气动实验与测量控制, 1993, 7(2): 81~89

Direct sub-optimal design of finite time LQR with partial state feedback

Chen Yangquan Hu Jianzhong

Abstract

A method for direct sub-optimal design of finite time LQR problem with partial state feedback is advanced. By combining the co-state equation and through forward-backward integration, a Newton-Raphson iteration can be applied. The state and control weighting matrices in functional index can be selected from practical considerations and other forms of term can be added. The concept of LQR is extended and solution for RDE or ARE can be avoided.

Key words: linear systems theory partial information finite time regulation
optimal control sub-optimization Newton-Raphson iteration

作者简介: 陈阳泉, 男, 27岁, 电子工程系副教授. 1987年于北京工业学院(现北京理工大学)自动控制系毕业, 获工学硕士学位. 1987年7月至9月, 去比利时布鲁塞尔“空间研究公司”(SRC)科研合作访问. 主要从事控制理论及应用, 现代外弹道理论与应用及工程实用方法与商品化软件开发. 目前研究方向是飞行器特性曲线辨识, 实用迭代学习控制方法与弹道外推方案研究以及仿真与静态优化一体化问题等.

通讯地址: 710032 西安市金花北路
西安工业学院电子工程系